

Berechnung einer kompressiblen Profilmströmung unter Verwendung des Impulspotentials

Diplomarbeit

Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Lehrstuhl für Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen

von

Dario Senter

20.01.2020

Matrikelnummer	385727
Institut	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) Institut für Raumfahrtantriebe, Lampoldshausen
Betreuer am Institut	Wolfgang Kitsche
Betreuer der Hochschule	Prof. Dr.-Ing. Martin Böhle

Kurzfassung

Das Beschreiben des Verhaltens von subsonischen Profilumströmungen im hohen Machzahlbereich ist eine herausfordernde Thematik in der Strömungsmechanik, deren Lösung nicht mehr durch vereinfachende Annahmen, wie denen der klassischen linearen Potentialtheorie, zu finden ist. Ab einer Anströmung mit einer gewissen Machzahl müssen für die realistische Darstellung einer Strömung Kompressibilitätseffekte innerhalb des strömenden Fluids berücksichtigt werden. Das Verlassen des Annahmegebiets der Inkompressibilität, bringt Faktoren mit sich, deren realistische Beschreibung nach komplexeren Berechnungsmodellen verlangt. Derartige Strömungen werden üblicherweise mit komplexen CFD-Simulationen berechnet und sind damit mit einem hohen Arbeits- und Rechenaufwand und schließlich auch mit hohen Kosten verbunden. In dieser Diplomarbeit soll ein Tool programmiert und getestet werden, dass mit geringstem Zeit-, Rechen- und Kostenaufwand realitätsnahe Resultate für die Berechnung kompressibler und subsonischer Profilumströmungen liefern soll. Dieses Tool soll in Form eines einfachen Microsoft-Excel-VBA-Moduls eine problemlose Anwendbarkeit auf diversen Betriebssystemen und die Anwendung auf Rechnern mit geringen Leistungsressourcen möglich machen. Für diesen Zweck wird die Panelmethode der klassischen Potentialtheorie insofern modifiziert, als dass sie anstelle des klassischen Geschwindigkeitspotentials die Idee eines sogenannten Impulspotentials nutzt.

Abstract

Describing the behaviour of subsonic profile flows in the high Mach number range is a challenging topic in fluid mechanics, the solution of which can no longer be found by simplifying assumptions such as those of classical linear potential theory. From an incident flow with a certain Mach number upwards, compressibility effects within the flowing fluid must be considered for the realistic representation of a flow. Leaving the assumption area of incompressibility brings factors in to play whose realistic description requires more complex calculation models. Such flows are usually calculated with complex CFD simulations and are thus associated with a high work and computational effort and finally also with high costs. In this diploma thesis, a tool is to be programmed and tested which is to provide realistic results for the calculation of compressible and subsonic profile flows with a minimum of time, calculation and cost expenditure. This tool is a simple Microsoft-Excel-VBA-module which can be used on different operating systems and on computers with low computing power. For this purpose, the panel method of classical potential theory is modified to use the idea of a so-called momentum potential instead of the classical velocity potential.

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich meine Projektarbeit mit dem Thema: „...“ selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich versichere zudem, dass die eingereichte elektronische Fassung mit der gedruckten Fassung übereinstimmt.

Lampoldshausen,

Ort, Datum

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung.....	II
Abstract	III
Eidesstattliche Erklärung.....	IV
Inhaltsverzeichnis.....	V
Abbildungsverzeichnis	VIII
Tabellenverzeichnis.....	XII
Symbolverzeichnis	XIII
1 Einleitung	- 13 -
2 Theoretische Grundlagen	- 13 -
2.1 Strömungsmechanische Grundlagen	- 13 -
2.1.1 Grundlegende Variablen zur Beschreibung einer Strömung.....	- 13 -
2.1.2 Strömungsarten.....	- 14 -
2.1.3 Betrachtungsweise einer Strömung	- 19 -
2.1.4 Fundamentale Gleichungen strömungsmechanischer Berechnungen	- 20 -
2.2 Grundlagen der Thermodynamik	- 27 -
2.2.1 Thermische Zustandsgleichung.....	- 27 -
2.2.2 Innere Energie und Enthalpie	- 28 -
2.2.3 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik und thermodynamische Prozesse ..	- 29 -
2.2.4 Entropie und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.....	- 29 -
2.2.5 Isentropische Zustandsänderung	- 30 -
2.2.6 Definition von totalen Zustandsgrößen	- 31 -

2.3	Grundlagen der angewandten Aerodynamik.....	- 31 -
2.3.1	Das Geschwindigkeitspotential	- 32 -
2.3.2	Elementarströmungen.....	- 33 -
2.3.3	Superpositionsprinzip	- 36 -
2.3.4	Panelverfahren.....	- 37 -
3	Impulspotential.....	- 42 -
3.1	Definition und Herausforderungen des Impulspotentials.....	- 43 -
3.2	Aufteilung des berechneten Impulsfeldes einer isentropen Strömung.....	- 44 -
4	Numerische Berechnungsmodelle.....	- 46 -
4.1	Allgemeine Parameter der Umströmungen	- 47 -
4.2	Ansys-Fluent	- 48 -
4.2.1	Umströmung NACA0012	- 48 -
4.2.2	Netzstudie.....	- 50 -
4.3	Panelverfahren.....	- 54 -
4.3.1	Berechnungen mit dem Panelverfahren	- 54 -
5	Resultate	- 56 -
5.1	Ansys-Fluent-Simulation	- 56 -
5.1.1	Inkompressibel	- 56 -
5.1.2	Kompressibel.....	- 58 -
5.2	Berechnung mit Panelverfahren	- 60 -
5.2.1	Panelverfahren 1: Panelverfahren mit Geschwindigkeitspotential	- 60 -
5.2.2	Panelverfahren2: Panelverfahren mit Impulspotential	- 62 -

5.3	Vergleich	- 65 -
5.3.1	Abweichung der Ergebnisse der verschiedenen Berechnungsmodelle	- 65 -
5.3.2	Einfluss der Rotation des Fluids auf die Genauigkeit von Panelverfahren 2..	- 75 -
6	Zusammenfassung und Ausblick	- 77 -
7	Literaturverzeichnis.....	- 79 -

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Machzahlregion einer Unterschallströmung (Anderson 2017, S. 58).....	- 16 -
Abbildung 2: Heterogene Machzahlregion transsonischer Strömungen (Anderson 2017, S. 85)	- 17 -
Abbildung 3: Machzahlregion einer Überschallströmung um einen spitzen Körper (angelehnt an Anderson 2017, S. 58)	- 18 -
Abbildung 4: Machzahlregion einer hypersonischen Strömung (angelehnt an Anderson 2017, S. 58)	- 18 -
Abbildung 5: Visualisierung zweier Kontrollvolumina (links: örtlich fixiert, rechts: mobil) (angelehnt an Anderson 2017, S. 100)	- 19 -
Abbildung 6: Infinitesimal kleines Fluidelement (links: örtlich fixiert, rechts: mobil) (angelehnt an Anderson 2017, S. 101)	- 20 -
Abbildung 7: Gleichförmige Strömung (angelehnt an Anderson 2017, S. 211).....	- 33 -
Abbildung 8: Quellenströmung (links) und Senkenströmung (rechts) (angelehnt an Anderson 2017, S. 213)	- 34 -
Abbildung 9: Wirbelströmung (Anderson 2017, S. 230)	- 35 -
Abbildung 10: Superposition zweier Elementarströmungen (angelehnt an Anderson 2017, S. 218).....	- 37 -
Abbildung 11:Quell-/Senkenverteilung (angelehnt an Anderson 2017, S. 248).....	- 38 -
Abbildung 12: Umströmung eines beliebig geformten Körpers (angelehnt an Anderson 2017, S. 249)	- 39 -
Abbildung 13: In Panel eingeteilter Körper (angelehnt an Anderson 2017, S. 249)	- 40 -
Abbildung 14: NACA 0012 Profil	- 47 -
Abbildung 15: Simulationsdomain.....	- 49 -
Abbildung 16: Ausschnitt des NACA 0012 Profils aus der vorherigen Abbildung	- 50 -

Abbildung 17: grob vernetzte Simulationsumgebung.....	- 51 -
Abbildung 18: Vergrößerung der Region um das Profil	- 51 -
Abbildung 19: Dreistufige Netzverfeinerung	- 52 -
Abbildung 20: Eingabeparameter VBA-Modul	- 55 -
Abbildung 21: Umströmung 1, inkompressibel: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils (Fluent)	- 57 -
Abbildung 22: Umströmung 2, inkompressibel: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils (Fluent)	- 58 -
Abbildung 23: Umströmung 1, kompressibel: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils (Fluent)	- 58 -
Abbildung 24: Umströmung 1, kompressibel: Dichte auf der Oberfläche des Profils (Fluent)...	- 59 -
Abbildung 25: Umströmung 2, kompressibel: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils (Fluent)	- 59 -
Abbildung 26: Umströmung 2, kompressibel: Dichte auf der Oberfläche des Profils (Fluent)...	- 60 -
Abbildung 27: Umströmung 1, Panelverfahren 1: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils	- 61 -
Abbildung 28: Umströmung 2, Panelverfahren 1: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils	- 61 -
Abbildung 29: Umströmung 1, Panelverfahren 2: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils	- 62 -
Abbildung 30: Umströmung 1, Panelverfahren 2: Dichte auf der Oberfläche des Profils..	- 62 -
Abbildung 31: Umströmung 2, Panelverfahren 2: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils in der Region um die Vorderkante	- 63 -

Abbildung 32: Umströmung 2, Panelverfahren 2: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils in der Region um die Hinterkante.....	- 64 -
Abbildung 33: Umströmung 2, Panelverfahren 2: Dichte auf der Oberfläche des Profils in der Region um die Vorderkante	- 64 -
Abbildung 34: Umströmung 2, Panelverfahren 2: Dichte auf der Oberfläche des Profils in der Region um die Hinterkante	- 65 -
Abbildung 35: Umströmung 1, Geschwindigkeit auf der Profilkontur aller vier Berechnungsmodelle	- 66 -
Abbildung 36: Umströmung 1: Abweichung von Panelverfahren 1 zur inkompressiblen Ansys-Simulation.....	- 67 -
Abbildung 37: Umströmung 1: Abweichung von Panelverfahren 1 zur kompressiblen Ansys-Simulation	- 68 -
Abbildung 38: Umströmung 1: Abweichung von Panelverfahren 2 zur kompressiblen Ansys-Simulation	- 69 -
Abbildung 39:Ausschnitt aus Abbildung 35,der die Region $0 > x/c < 0,015$ vergrößert zeigt...	- 69 -
Abbildung 40: Umströmung 1: Region1: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation.....	- 70 -
Abbildung 41: Umströmung 1: Region2: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation.....	- 71 -
Abbildung 42: Umströmung 1: Region3: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation.....	- 72 -
Abbildung 43:Umströmung 1: Schnittpunkte 1 der Kurven der Panelverfahren.....	- 72 -
Abbildung 44: Schnittpunkte 2 der Kurven der Panelverfahren	- 73 -
Abbildung 45: Umströmung 2: Region1: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation.....	- 74 -

Abbildung 46: Umströmung 2: Region3: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation.....	- 75 -
Abbildung 47: Umströmung 1: Differenz zwischen lokaler Geschwindigkeit und Anströmgeschwindigkeit.....	- 76 -
Abbildung 48: Umströmung 1: Rotationsverlauf.....	- 77 -

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Grundparameter der Simulationen	- 48 -
Tabelle 2: Feinheit der drei Netze	- 52 -
Tabelle 3: Werte der maximalen Geschwindigkeit und Dimensionen der Netze Umströmung 1 inkompressibel	- 52 -
Tabelle 4: Werte der maximalen Geschwindigkeit und Dimensionen der Netze Umströmung 1 kompressibel.....	- 53 -
Tabelle 5: Werte der maximalen Geschwindigkeit und Dimensionen der Netze Umströmung 2 inkompressibel	- 53 -
Tabelle 6: Werte der maximalen Geschwindigkeit und Dimensionen der Netze Umströmung 2 kompressibel.....	- 53 -

Symbolverzeichnis

Lateinische Formelzeichen:

A	m^2	geometrische Fläche
a	$\frac{m}{s}$	Schallgeschwindigkeit
c_p	$\frac{kJ}{kg \cdot K}$	spezifische isobare Wärmekapazität
c_v	$\frac{kJ}{kg \cdot K}$	spezifische isochore Wärmekapazität
e	$\frac{kJ}{kg}$	spezifische innere Energie
F	N	Kraft
g	$\frac{m}{s^2}$	Erdbeschleunigung
h	$\frac{kJ}{kg}$	spezifische Enthalpie
M	-	Machzahl
\dot{m}	$\frac{kg}{s}$	Massenstrom
p	Pa	statischer Druck
p_t	Pa	Totaldruck
\dot{Q}	kW	Wärmestrom
q	$\frac{kJ}{kg}$	spezifische Wärmemenge
\dot{q}	$\frac{kW}{kg}$	spezifischer Wärmestrom
R_s	$\frac{kJ}{kg \cdot K}$	spezifische Gaskonstante
s	$\frac{kJ}{kg \cdot K}$	spezifische Entropie
T	K	Temperatur
T_t	K	Totaltemperatur
t	s	Zeit
u	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeit in x-Richtung
V	m^3	Volumen
\vec{v}	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeitsvektor

Formelzeichen	Einheit	Bezeichnung
<hr/>		
v	$\frac{m^3}{kg}$	spezifisches Volumen
v	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeit in y-Richtung
w	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeit in z-Richtung
z	m	geodätische Höhe

Griechische Formelzeichen:

δ_{ij}	-	Kronecker-Delta
κ	-	Isentropenexponent
λ	$\frac{kW}{m \cdot K}$	Wärmeleitfähigkeit
μ	$Pa \cdot s$	molekulare dynamische Viskosität
ρ	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte

1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist das Aufbauen einer theoretischen Grundlage zum Verständnis aller darin genutzten Werkzeuge und das darauf basierende Berechnen, Vergleichen und Bewerten der hier untersuchten Methode des Panelverfahrens mit Impulspotential. Das Kapitel der theoretischen Grundlagen wird eine Basis schaffen, die es erlaubt strömungsmechanische und thermodynamische Modelle und Betrachtungsweisen nachvollziehbar zu Nutzen und Berechnungen mit den Werkzeugen der angewandten Aerodynamik durchzuführen. Die Funktionalität und die Herausforderungen rund um die Fehlerquellen der für die Berechnungen genutzten Idee eines Impulspotential werden dem Leser im darauffolgenden Kapitel nahegebracht und ist Grundlage des in dieser Arbeit zu untersuchenden und im Kapitel Berechnungsmodelle detailliert beschriebenen Panelverfahrens. Der Schluss dieser Arbeit besteht aus einer Analyse der mit diesem Modell berechneten Resultate und dem Vergleich dieser mit denen einer CFD-Simulation.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel folgen Erläuterungen theoretischer Sachverhalte, die für das allgemeine Verständnis des in dieser Arbeit behandelten Stoffes dienen. Neben kurzen Definitionen grundlegender physikalischer Größen, beinhaltet dieses Kapitel Erläuterungen zu den in dieser Arbeit angewandten Methoden sowie Verfahren zur Berechnung von Umströmungen.

2.1 Strömungsmechanische Grundlagen

Im Folgenden werden fundamentale Eigenschaften von Strömungen, sowie unterschiedliche Vorgehen zur Modellierung und Verständnis dieser, beschrieben und voneinander abgegrenzt.

2.1.1 Grundlegende Variablen zur Beschreibung einer Strömung

Die Eigenschaften einer Strömung werden durch die vier wichtigsten Variablen der Strömungsmechanik beschrieben: der Druck, die Dichte, die Temperatur und die Strömungsgeschwindigkeit. Aufgrund der Bedeutung dieser Variablen wird hier ein verdeutlichendes Beispiel genutzt, um diese zu erläutern. Im Falle eines soliden Körpers, welcher vollständig in ein Fluid getaucht ist, verspürt dieser auf seiner Oberfläche, die andauernden Bewegungen der Fluidmoleküle. Die zeitliche Änderung des Impulses der

Fluidmoleküle, übt eine Kraft auf die Oberfläche des Körpers aus. Der Druck definiert sich als die Kraft pro Fläche, welche normal auf die Oberfläche wirkt.

$$p = \lim_{dA \rightarrow 0} \left(\frac{dF}{dA} \right) \quad 2.1$$

Der Druck ist im Falle einer Strömungsberechnung eine Variable, die für einen bestimmten Punkt definiert ist und sich von einem zum anderen Punkt verändern kann. Die Definition der Kraft pro Flächeneinheit wird für einen infinitesimal kleinen Bereich betrachtet, der im mikroskopischen Denken dennoch groß genug ist, um genügend Moleküle des Fluids zu beinhalten.

Die Dichte ist eine weitere wichtige Variable bei der Beschreibung einer Strömung, welche als Masse pro Volumeneinheit definiert ist. Analog zur Beschreibung des Druckes, ist die Dichte auch eine Punkteigenschaft, die durch die, in einem infinitesimal kleinen Volumen vorhandene, Masse gegeben ist.

$$\rho = \lim_{dV \rightarrow 0} \left(\frac{dm}{dV} \right) \quad 2.2$$

Die Variable, die eine Strömung im wörtlichen Sinn ermöglicht, ist die Geschwindigkeit. Des Weiteren ist sie eine punktuelle Eigenschaft und besitzt eine vektorielle Orientierung.

Die letzte der vier Variablen zur Beschreibung einer Strömung, ist die Temperatur. Die Temperatur eines Fluids hat besonders in Hochgeschwindigkeitsströmungen eine wichtige Rolle. Sie ist proportional zur durchschnittlichen kinetischen Energie der Moleküle eines Fluids. Ein warmes, energiereiches Fluid, beinhaltet sich schnell bewegende Atome. Wie alle Variablen, ist auch die Temperatur eine punktuelle Eigenschaft. (Anderson 2017, S. 12–14)

2.1.2 Strömungsarten

In dieser Arbeit werden Fälle betrachtet, in denen Festkörper von Fluiden umströmt und die Auswirkungen dieser Umströmungen auf die Festkörper berechnet werden. Um diese Umströmungen mathematisch beschreiben zu können, werden unter verschiedenen Arten von Strömungen unterschieden. Diese Arten unterscheiden sich in den Annahmen, die über die molekulare Bewegung des Fluids und Berücksichtigung von komplexen Interaktionen des Fluids mit dem soliden Körper, getroffen werden.

Allem voran gilt es die Strömung mikroskopisch zu bewerten. Hierzu wird zwischen einer Kontinuums- und einer Molekularströmung unterschieden. Eine Kontinuumsströmung zeichnet sich dadurch aus, dass die Intensität der intermolekularen Bewegungen der Fluidmoleküle in keiner Relation zu der Objektgröße des umströmten Objektes stehen d.h., dass der durchschnittliche Bewegungsradius zwischen Kollisionen mit seinem Nachbarn eines Moleküls λ eine viel kleinere Größenordnung besitzt, als die des umströmten Objekts. Durch diese Annahme kann der solide Körper nicht zwischen den zahlreichen Kollisionen der einzelnen Moleküle unterscheiden und empfindet das Fluid als kontinuierliches Medium. Im Gegensatz hierzu ist λ in einer Molekularströmung in der gleichen Größenordnung wie der umströmte Körper und lässt dadurch das Fluid als nicht kontinuierlich wirken. Molekularströmungen finden z.B. im Falle eines Flugs durch die äußere Atmosphäre statt, in der die Luftdichte niedrig genug ist, sodass die Größenordnung der intermolekularen Bewegungen der Luftteilchen die gleichen Ausmaße wie die des Flugkörpers annimmt. Da dieser Ausnahmefall in einem Großteil der Aerodynamik nicht auftritt, handelt es sich im Umfang dieser Arbeit bei den behandelten Strömungen immer um Kontinuumsströmungen. (Anderson 2017, S. 54)

Eine grundlegende Eigenschaft von einem Fluid ist die zufällige Bewegung seiner Moleküle. Diese molekularen Bewegungen bringen den Transport von Masse, Energie und Impulsen mit sich und implizieren damit Phänomene wie Massendiffusion, Reibung und Wärmeleitung. Diese Phänomene werden viskose Effekte genannt und sind von sehr komplexer Natur. Daher kann die Einteilung von Strömungen in viskose und nichtviskose Strömungen, eine große Vereinfachung der Herangehensweise an die Berechnung einer Umströmung darstellen. An sich ist keine Strömung frei von viskosen Effekten, dennoch gibt es Regionen innerhalb einer Strömung, in der die viskosen Effekte vernachlässigbar klein sind und die Strömung als nichtviskos betrachtet werden kann. Für die in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen, wird es sich zumeist um Strömungen handeln, die bis auf eine Region nahe der Oberfläche eines umströmten Körpers, namentlich der Grenzschicht, als nichtviskos angesehen werden können. Wärmeleitung, Reibung und Diffusion für solche Strömungen, spielen sich hauptsächlich in der Grenzschicht ab. (Anderson 2017, S. 54–56)

Ein weiterer, wichtiger Aspekt zur Unterteilung von Strömungen, ist die Kompressibilität des strömenden Fluids. Eine Strömung, in der die Dichte des Fluids konstant ist, wird inkompressibel genannt. Umgekehrt ist eine Strömung, in der die Dichte eine Variable ist, eine kompressible Strömung. In der Realität sind alle Substanzen zu einem gewissen Grad

kompressibel. Mathematisch ist die Kompressibilität einer Substanz folgendermaßen als τ gegeben:

$$\tau = \frac{1}{\rho} * \left(\frac{d\rho}{dp} \right) \quad 2.3$$

$$d\rho = \rho * \tau * dp \quad 2.4$$

Eine Krafteinwirkung hat immer eine Änderung der Dichte zur Folge. Jedoch gibt es viele Anwendungsgebiete, in denen eine Strömung als inkompressibel betrachtet werden kann. Dazu gelten Anwendungen in der Hydrostatik und Strömungen von Gasen mit $M_\infty \leq 0,3$.

Die Kompressibilität eines Fluids hängt stark mit der Machzahl der Strömung zusammen. Dadurch kann die Einteilung von Strömungen in Machzahlgebiete, ein vorteilbringender Aspekt sein, um eine Strömung hinsichtlich ihrer Kompressibilität einzuordnen. Wenn die lokale Machzahl an jedem Punkt in einem Strömungsfeld mit M gegeben ist, kann die Strömung für:

- $M < 1$ als Unterschallströmung
- $M = 1$ als Strömung mit Schallgeschwindigkeit
- $M > 1$ als Überschallströmung

bezeichnet werden. (Anderson 2017, S. 448–449)

Eine Unterschallströmung zeichnet sich durch kontinuierliche Stromlinien und einer globalen Unterschallgeschwindigkeit aus. Letzteres lässt Perturbationen, die z.B. durch den Aufprall einer Strömung auf die Vorderkante eines Flügelprofils entstehen, sich stromabwärts und stromaufwärts verbreiten. Somit werden diese im ganzen Strömungsfeld gespürt. Allerdings versichert eine Anströmung mit einer Machzahl von $M_\infty < 1$ keine reine Unterschallströmung.

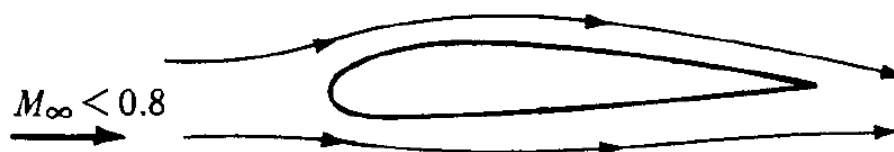


Abbildung 1: Machzahlregion einer Unterschallströmung (Anderson 2017, S. 58)

Im Falle einer Umströmung eines aerodynamisch geformten Profils mit einer Unterschallanströmung und einer Machzahl, die nah genug an $M=1$ liegt, können Strömungsgeschwindigkeiten auf der umströmten Oberfläche stark ansteigen und zu lokalen Machzahlen von $M>1$ führen. Im Gegensatz dazu, entsteht bei Umströmungen eines aerodynamisch geformten Profils mit einer Überschallanströmung und einer Machzahl, die nah genug an $M=1$ liegt, eine Normalstoßwelle vor der Führungskante, hinter der sich eine Region formt, in der lokale Machzahlen von $M<1$ vorliegen und auf der Oberfläche Profils wieder auf Machzahlen von $M>1$ ansteigen. Strömungen mit derartigen gemischten Regionen, in denen lokale Machzahlen von $M<1$ und $M>1$ existieren, werden transsonische Strömungen genannt. Bei aerodynamisch geformten Profilen wird für Anströmmachzahlen im Bereich von $M=0,7$ und $M=1,2$ werden transsonische Strömungen erzeugt.

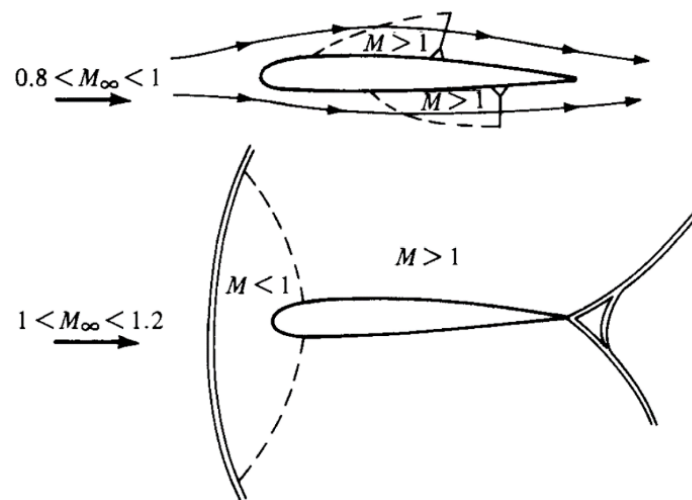


Abbildung 2: Heterogene Machzahlregion transsonischer Strömungen (Anderson 2017, S. 85)

Sobald die Machzahl der Anströmung auf $M_\infty > 1,2$ steigt, ist die Rede von einer Überschallströmung. Die Normalstoßwelle der transsonischen Zone hat sich mit steigender Machzahl auf den Körper zubewegt und sich zu einer, mit der Oberfläche bündigen, schrägen Stoßwelle, entwickelt. Hierbei muss erwähnt werden, dass es sich bei dem Bereich von $0,7 < M_\infty < 1,2$ um eine Faustregel handelt und dieser stark von der Kontur des umströmten Körpers abhängt. Wenn der Winkel θ groß genug ist, transformiert sich die schräge Stoßwelle zurück, zu einer vom Körper getrennten, normalen Stoßwelle, sodass sich die Strömung analog zu einer transsonischen Strömung verhält. Wie in Abbildung 4 zu sehen, liegen, bei einer Überschallströmung hinter dieser Stoßwelle, weiterhin lokale Machzahlen von $M_\infty > 1$ vor. Dadurch, dass im gesamten Strömungsgebiet lokale Machzahlen von $M > 1$ vorliegen,

breiten sich, im Gegensatz zu einer Unterschallströmung, kleine Perturbationen nur noch stromabwärts aus. Dies ist der Hauptgrund für die Entstehung von Stoßwellen und die diskontinuierliche Änderung der Strömungseigenschaften.

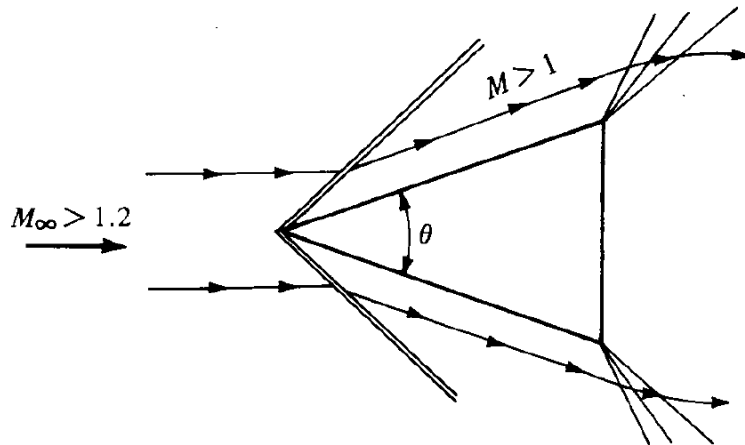


Abbildung 3: Machzahlregion einer Überschallströmung um einen spitzen Körper (angelehnt an Anderson 2017, S. 58)

Bei der Fixierung eines Winkels θ und einer weiteren Erhöhung der Anströmmachzahl auf Werte von $M_\infty > 5$, handelt es sich um hypersonische Strömungen. Mit Erhöhung der Machzahl, nähert sich die schräge Stoßwelle, wie auf Abbildung 5 zu sehen, weiter der Körperoberfläche an. Die Region zwischen Stoßwelle und Oberfläche wird dabei so gering, dass sie auf die Region der Grenzschicht fällt und diese miteinander interagieren. In hypersonischen Strömungen dominieren diese viskosen und chemischen Interaktionen das Strömungsfeld. (Anderson 2017, S. 57–59)

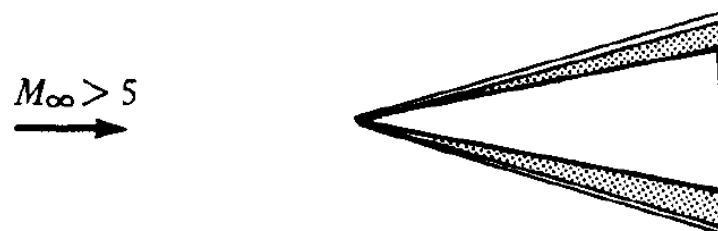


Abbildung 4: Machzahlregion einer hypersonischen Strömung (angelehnt an Anderson 2017, S. 58)

2.1.3 Betrachtungsweise einer Strömung

Das Beschreiben eines strömenden Fluids gestaltet sich schwieriger als das eines geometrisch eindeutig definierten, soliden Körpers. Jedoch ist dies notwendig, um grundlegende physikalische Gesetzmäßigkeiten auf eine Strömung zu beziehen und diese dadurch zu beschreiben. Drei dieser grundlegenden Gesetzmäßigkeiten sind die Erhaltung der Masse, Newtons 2. Gesetz: Kraft gleich Masse mal Beschleunigung und die Erhaltung bzw. Umwandlung von Energie. Um diese auf ein geometrisch undefiniertes, strömendes Fluid anzuwenden, werden Strömungen auf verschiedene Weisen betrachtet, um das mikroskopische Verhalten der makroskopischen Strömung zu beschreiben.

Ein Ansatz, ist das Betrachten eines geschlossenen Volumens, in einer ausreichend großen Region der Strömung, sodass diese für die Strömung repräsentativ ist. Dieses Kontrollvolumen besitzt eine geschlossene Kontrollfläche A , die das gesamte Volumen umschließt. Es wird zwischen zwei Arten von Kontrollvolumina unterschieden. In Abbildung 5 sind diese unterschiedlichen Denkweisen durch das Kontrollvolumen und die Stromlinien des Strömungsfeldes bildlich dargestellt. Links ist ein Kontrollvolumen dargestellt, das örtlich in der Strömung fixiert ist und von dem Fluid durchströmt wird. Rechts strömt das Kontrollvolumen mit der Strömung durch das Strömungsfeld und besitzt dabei zu jedem Zeitpunkt dieselbe Menge an Fluidpartikeln in sich. Auf das Fluid, das diese repräsentativen Regionen entweder durchströmt (links) und das im Kontrollvolumen vorhanden ist (rechts), werden die oben genannten drei Grundlegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten angewendet. (Anderson 2017, S. 100)

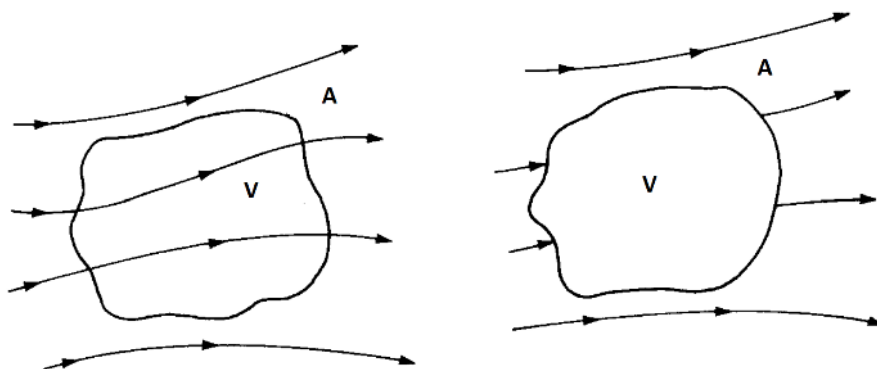


Abbildung 5: Visualisierung zweier Kontrollvolumina (links: örtlich fixiert, rechts: mobil) (angelehnt an Anderson 2017, S. 100)

Das Strömungsfeld kann auch durch ein infinitesimal kleines Fluidelement mit dem Volumen dV repräsentiert werden. Dieses kann als infinitesimal im Sinne der Differentialrechnung angesehen werden, ist dennoch ausreichend groß und beinhaltet eine große Menge an Fluidpartikeln, um als Kontinuumsströmung zu gelten. Analog zum Ansatz des Kontrollvolumenverfahrens ist in Abbildung 6 das infinitesimale Fluidelement als örtlich fixiert (links) und mobil (rechts) dargestellt.

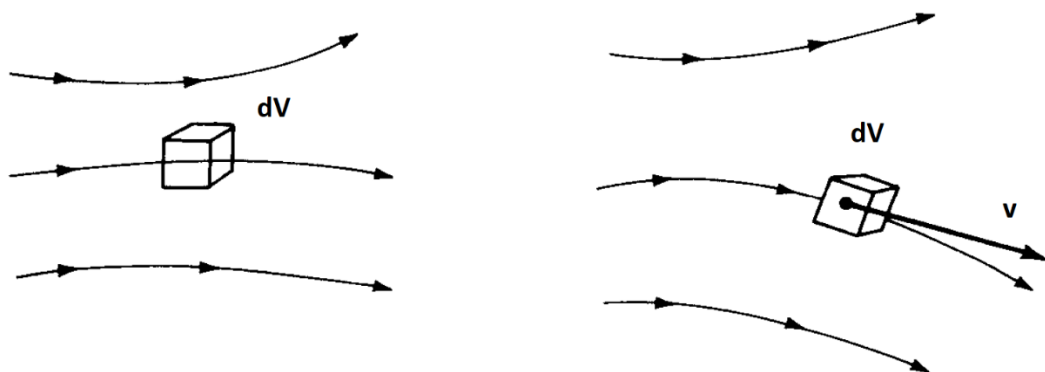


Abbildung 6: Infinitesimal kleines Fluidelement (links: örtlich fixiert, rechts: mobil) (angelehnt an Anderson 2017, S. 101)

2.1.4 Fundamentale Gleichungen strömungsmechanischer Berechnungen

Der erste Schritt zur Behandlung eines strömungsmechanischen Problems, ist es die komplexe Natur des strömenden Fluids mit den, in den Abschnitten 2.1.1 bis **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** gezeigten, Werkzeugen derart passend zu modellieren, sodass im zweiten Schritt grundlegende physikalische Prinzipien auf die Strömung bezogen werden können, um das System vollständig zu beschreiben und letztendlich eine Basis für eine Berechnung zu liefern. Diese sind namentlich die

- Massenerhaltung
- Impulserhaltung
- Energieerhaltung

und werden im Folgenden in Form von Bilanzgleichungen für ein beispielhaftes Strömungsfeld aufgestellt.

Betrachtet wird ein örtlich fixiertes, finites Kontrollvolumen innerhalb dieses Strömungsfeldes einer Kontinuumsströmung (Abbildung 5 links). Das Kontrollvolumen V und die Kontrollfläche S sind konstante Größen und werden von der Strömung mit dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} durchflossen. Lediglich die darin befindliche Masse ändert sich mit der Zeit.

Auf diesen Teil des Strömungsfeldes wird das Prinzip der Massenerhaltung angewandt. Dieses besagt, dass Masse weder zerstört noch erschaffen werden kann. Bezogen auf das Kontrollvolumen, fordert dies, dass der gesamte, das Kontrollvolumen V durch die Kontrollfläche S verlassende Massenstrom gleich der zeitlichen Abnahmerate, der im Kontrollvolumen vorhandenen Masse, sein muss.

$$\text{Verlustmassenstrom durch die Kontrollfläche} = \text{Zeitliche Abnahmerate der Kontrollmasse} \quad 2.5$$

Um einen mathematischen Ausdruck für die linke Seite von Gleichung 2.5 aufzustellen, wird die Menge an Fluid, die das Kontrollvolumen senkrecht durch einen infinitesimal kleinen Teil dS der Kontrollfläche S durchfließt, betrachtet.

$$d\dot{m} = \rho v_n dS = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} \quad 2.6$$

Das Flächenintegral über die gesamte Kontrollfläche S ergibt nun den gesamten Verlustmassenstrom \dot{m} , der das Kontrollvolumen durch die Fläche S verlässt und somit auch einen Ausdruck für die linke Seite von Gleichung 2.5.

$$\dot{m} = \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} \quad 2.7$$

Für einen Ausdruck der rechten Seite von Gleichung 2.5, wird die zeitliche Ableitung, der im Kontrollvolumen bestehenden Masse gebildet. Diese lässt sich als das Integral über das gesamte Kontrollvolumen, der sich in einem Volumenelement befindlichen Masse, formulieren.

$$dm = \rho dV \quad 2.8$$

$$m = \iiint_V \rho dV \quad 2.9$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \quad 2.10$$

Gleichung 2.10 repräsentiert eine positive Änderungsrate der Kontrollmasse und muss somit mit einem negativen Vorzeichen versehen werden, bevor sie gemeinsam mit Gleichung 2.7 einen mathematischen Ausdruck für das in Worten formulierte Prinzip der Massenerhaltung aus Gleichung 2.5 ergibt.

$$\oiint_S \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \quad 2.11$$

Gleichung 2.11 ist eine integrale Formulierung der Massenerhaltung in Form einer Gleichung für ein örtlich fixiertes Kontrollvolumen innerhalb einer Kontinuumsströmung. Diese integrale Form hat den Vorteil, das Verhalten einer Strömung innerhalb der Integralgrenzen, ohne detailliertes Wissen über die Geschehnisse zwischen diesen zu besitzen, beschreiben zu können. In dieser Arbeit sind jedoch diese Geschehnisse von Interesse, daher ist es notwendig Gleichung 2.11 umzuformulieren. Da das für die Formulierung von Gleichung 2.11 genutzte Kontrollvolumen örtlich fixiert ist, sind auch die Grenzen des Volumenintegrals fixiert und erlauben es, die zeitliche Ableitung in das Integral zu schreiben.

$$\oiint_S \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = -\iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV \quad 2.12$$

Anschließend kann das Flächenintegral des Ausdrucks auf der linken Seite von Gleichung 2.12 durch Anwendung des gaußschen Integralsatzes zu einem Volumenintegral umgeformt werden,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV + \iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV = 0 \quad 2.13$$

,m den gesamten Ausdruck schließlich durch Nullsetzen des Integranden von dem Volumenintegral zu lösen.

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad 2.14$$

Gleichung 2.14 ist eine Formulierung der Massenerhaltung in Form einer partiellen Differentialgleichung. Beide Formulierungen beschreiben dieselbe Strömung und sind gleichermaßen gültige, mathematische Ausdrücke, jedoch beschreibt Gleichung 2.14 die Variablen an einem gewissen Punkt in der Strömung, im Gegensatz zu Gleichung 2.11, die das Kontrollvolumen an seinen Grenzen beschreibt. (Anderson 2017, S. 107–111)

Auf dasselbe örtlich fixierte Kontrollvolumen wird nun die Impulserhaltung angewendet. Dieses zweite fundamentale Prinzip basiert auf Newtons zweitem Axiom: Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad 2.15$$

Wenn in Gleichung 2.15 die Beschleunigung mit ihrer Ableitung ersetzt wird, wird ersichtlich, dass Kraft gleich der zeitlichen Änderung des Impulses ist.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m * \vec{v}) \quad 2.16$$

Die linke Seite von Gleichung 2.16 beschreibt die Kräfte, die auf das das Kontrollvolumen durchfließende Fluid ausgeübt werden. Diese Kräfte sind in Feldkräfte, die durch Gravitation oder Magnetismus auftreten, und in Oberflächenkräfte wie z.B. Druck und Reibung aufzuteilen. Die zuerst genannten Feldkräfte können durch das Volumenintegral einer Variablen f , die eine massenabhängige Kraft repräsentiert, über das gesamte Kontrollvolumen formuliert werden.

$$\iiint_V \rho \vec{f} dV \quad 2.17$$

Der Teil der Oberflächenkräfte, der durch die Druckverteilung entsteht, wird als Oberflächenintegral des Drucks über die gesamte Kontrollfläche gebildet und ist mit einem negativen Vorzeichen versehen, da die betrachteten Druckkräfte von dem Fluid auf den Körper ausgeübt werden. Auf viskose Kräfte wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen, deshalb wird der Teil der Oberflächenkräfte, der durch Reibung erzeugt wird,

vereinfacht zu den viskosen Kräften \vec{F}_{vis} zusammengefasst. Die Summe dieser Bestandteile bildet einen Ausdruck für den linken Term von Gleichung 2.16.

$$\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{f} dV - \iint_S p \vec{dS} + \vec{F}_{vis} \quad 2.18$$

Der rechte Term von Gleichung 2.16 beschreibt die zeitliche Änderung des Impulses. Er besteht aus einer Impulsstrombilanz und einem Anteil an nicht stationären Schwankungen des Impulses. Die Impulsstrombilanz wird durch das Integrieren des Impulsstroms durch ein Flächenelement über die gesamte Kontrollfläche aufgestellt.

$$\iint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{dS}) \vec{v} \quad 2.19$$

Der im Kontrollvolumen vorhandene Impuls wird durch das Integrieren des Impulses eines Volumenelements über das gesamte Kontrollvolumen gebildet. Um eine Änderungsrate dieses Impulses zu beschreiben, wird die zeitliche Ableitung gebildet.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV \quad 2.20$$

Die zeitliche Ableitung dieses Impulses bildet zusammen mit Gleichung 2.19 einen Ausdruck für den rechten Term von Gleichung 2.16.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV + \iint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{dS}) \vec{v} = \iiint_V \rho \vec{f} dV - \iint_S p \vec{dS} + \vec{F}_{vis} \quad 2.21$$

Gleichung 2.21 ist eine vektorielle Gleichung in integraler Form. Es bietet sich an, diese in drei skalare Gleichungen für die drei kartesischen Koordinaten aufzuteilen. An dem Beispiel der x-Komponente wird Gleichung 2.21 zu einer differentiellen Gleichung umgeformt. Analog zur vorherigen Umformung der Massenerhaltung kann die zeitliche Ableitung in die Grenze des Integrals geschrieben werden und das Oberflächenintegral auf der linken Seite kann zu einem Volumenintegral umgeformt werden. Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite kann wiederum durch das Gradienten Theorem gleichermaßen umgewandelt werden.

$$\iiint_V \frac{d(\rho u)}{dt} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) dV = \iiint_V \rho \vec{f}_x dV - \iiint_V \frac{dp}{dx} dV + \vec{F}_{vis,x} \quad 2.22$$

Durch das Nullsetzen des Integranden folgt die differentielle Form:

$$\frac{d(\rho u)}{dt} + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) = \rho \vec{f}_x - \frac{dp}{dx} + \vec{F}_{vis,x} \quad 2.23$$

(Anderson 2017, S. 112–116)

Die zuvor hergeleiteten Bilanzgleichungen der Massen- und Impulserhaltung, beinhalten im Grunde nur zwei Variablen: den Druck und den Geschwindigkeitsvektor. Somit sind sie für eine inkompressible Strömung ausreichend, um diese eindeutig zu beschreiben. Doch um eine kompressible Strömung, in der durch die variable Dichte eine weitere Unbekannte hinzukommt, beschreiben zu können, wird eine zusätzliche Gleichung benötigt. Diese zusätzliche Gleichung kann durch das dritte und letzte fundamentale Prinzip formuliert werden: die Energieerhaltung. Analog zur Massenerhaltung besagt dieses, dass Energie weder zerstört noch erschaffen werden, sondern nur ihre Form ändern kann. Als mathematische Formulierung dieses Prinzips, dient der erste Hauptsatz der Thermodynamik.

$$\partial q + \partial w = \partial e \quad 2.24$$

Gleichung 2.24 ist eine Formulierung des ersten Hauptsatz der Thermodynamik und setzt sich angewendet auf ein örtlich fixiertes Kontrollvolumen zusammen aus den zeitlichen Änderungen der Wärme, die dem Fluid von außen hinzugefügt wird, der Arbeit, die an dem Fluid verrichtet wird, und der Änderung der Energie des Kontrollvolumen durchfließenden Fluids. Die zeitliche Änderung der Wärme ∂q besteht aus einem Integral des volumenspezifischen Wärmestroms \dot{q} über das gesamte Kontrollvolumen sowie aller durch viskose Effekte erzeugten Wärme, die vereinfacht zu \dot{Q}_{vis} zusammengefasst werden.

$$\partial q = \iiint_V \rho * \dot{q} * dV + \dot{Q}_{vis} \quad 2.25$$

Arbeit ist im physikalischen Sinne eine das Produkt aus der in die Wegrichtung wirkenden Kraft mit der Wegstrecke. Die zeitliche Änderung dieser ist folglich das Produkt aus Kraft mit der Geschwindigkeit. Mit Gleichung 2.18 ist schon ein Ausdruck für die Kraft vorhanden und

wird durch Multiplikation mit dem Geschwindigkeitsvektor zur zeitlichen Änderung der Arbeit ∂w .

$$\partial w = \left(\iiint_V \rho \vec{f} dV - \iint_S p \vec{dS} + \vec{F}_{vis} \right) \vec{v} \quad 2.26$$

Die im Kontrollvolumen vorhandene Energie ändert sich durch das Kontrollvolumen verlassende und eindringende Massenströme sowie durch nicht stationäre Schwankungen. Dadurch, dass das strömende Fluid in Bewegung ist, setzt sich dessen Energie aus einer massenspezifischen internen Energie e und einem kinetischen Anteil $\frac{v^2}{2}$ zusammen. Der Nettomassenstrom der das Kontrollvolumen durch die Kontrollfläche durchströmenden Massenströmen kann als Produkt aus dem Oberflächenintegral der eines Massenelementes über die gesamte Kontrollfläche und der massenspezifischen Energie formuliert werden.

$$\iint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{dS}) \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \quad 2.27$$

Zusammen mit der zeitlichen Ableitung der sich in dem Kontrollvolumen vorhandenen Energie ergibt Gleichung 2.27 die integrale Bilanzgleichung der Energieerhaltung.

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho * \dot{q} * dV + \dot{Q}_{vis} - \left(\iiint_V \rho \vec{f} dV - \iint_S p \vec{dS} + \vec{F}_{vis} \right) \vec{v} \\ = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \iint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{dS}) \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned} \quad 2.28$$

Analog zu den Umformungen der anderen Beiden integralen Bilanzgleichung, kann auch Gleichung 2.28 durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf die Oberflächenintegrale und durch Nullsetzen des Integranden kann zu einer differentiellen Bilanzgleichung umgeformt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] \\ = \rho \dot{q} - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) + \dot{W}'_{vis} + \dot{Q}'_{vis} \end{aligned} \quad 2.29$$

(Anderson 2017, S. 125–131)

2.2 Grundlagen der Thermodynamik

Eine Strömung kann, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, als System modelliert und betrachtet werden, doch dies reicht nicht zur Berechnung eines konkreten Falls einer Umströmung aus. Neben dem strömungsmechanischen Verhalten des Systems, muss auch das thermodynamische Verhalten des strömenden Fluids beschrieben werden. Im Folgenden werden Eigenschaften und Annahmen erläutert, die für das Beschreiben des thermodynamischen Zustands eines Fluids und dessen Änderung getroffen werden.

2.2.1 Thermische Zustandsgleichung

Der Zustand des in dem System vorhandenen Fluids, wird durch die thermodynamischen Eigenschaften beschriebenen physikalischen Größen und Variablen ausgedrückt. Ein solcher Zustand kann einem System zugeordnet werden, sobald dieser durch einen Satz von Variablen eindeutig bestimmt werden kann. Die Zahl der voneinander unabhängigen Zustandsgrößen, die zu einer eindeutigen Bestimmung des Zustands benötigt wird, ist von der Art des Systems abhängig und steigt mit dessen Komplexität. Ein Aspekt dieser Komplexität ist das angenommene Fluidmodell. (Baehr und Kabelac 2016, S. 15–16)

Um einen solchen Satz von Variablen aufzustellen, ist eine Annahme des Fluidmodells nötig. Man unterscheidet zwischen realen, idealen und perfekten Gasen. Diese Annahmen über das Modell des Fluids unterscheiden sich in der Berücksichtigung physikalischer Interaktionen und der Form der Fluidatome. Für technische Anwendungen wird oft die Vereinfachung des idealen Gases verwendet, die die Teilchen im Gas als weit voneinander entfernt annimmt, sodass es keine Anziehungskräfte zwischen diesen gibt. Für derartige Gase nennt sich der Satz an Variablen zur Beschreibung des Zustandes allgemeine Gasgleichung. Gleichung 2.30 stellt einen Zusammenhang zwischen dem Druck, der Dichte, der spezifischen Gaskonstante und der Temperatur her, um den thermodynamischen Zustand des Fluids zu definieren.

$$p = \rho \mathfrak{R} T \quad 2.30$$

Ein perfektes Gas nimmt die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v und die Wärmekapazität bei konstantem Druck Volumen c_p als konstant an. Diese zwei Modelle sind starke Vereinfachungen des Verhaltens eines realen Gases, jedoch ist es eine gute Näherung für nicht allzu große Drucke und Temperaturen. (Thermodynamik 2009, S. 36)

2.2.2 Innere Energie und Enthalpie

Betrachtet sei ein „Gas“, bestehend aus einem einzelnen O_2 Molekül. Die innere Energie dieses Gases setzt sich aus verschiedenen Energieformen zusammen, die im Folgenden anhand der einfachen Form eines O_2 Moleküls erläutert werden. Das hantelförmige O_2 Molekül bewegt sich durch zufällige Bewegungen durch den Raum und besitzt somit eine translatorische kinetische Energie. Des Weiteren rotiert die „Hantel“ um ihre Achsen und fügt der kinetischen Energie dadurch eine weitere Komponente hinzu. Zudem kann das Molekül vibrieren und dadurch eine Vibrationsenergie besitzen. Neben diesen Bewegungsenergien besitzt das Molekül eine potenzielle Energie und eine durch die Bewegung der Elektronen um den Atomkern erzeugte elektronische Energie. Zusammengefasst bezeichnet die innere Energie die Summe aus kinetischer, vibratorischer, potenzieller und elektronischer Energie. Analog zu den vorherigen Kapiteln wird zur mathematischen Definition der inneren Energie ein Kontrollvolumen V betrachtet, das eine große Anzahl an Molekülen eines Gases beinhaltet. Die Summe der eben genannten Energien aller dieser Moleküle pro Kilogramm Gas wird als spezifische innere Energie e bezeichnet. Eine verwandte und technische relevantere physikalische Größe ist die spezifische Enthalpie h , die sich gemäß Gleichung 2.31 aus innerer Energie und dem Produkt des Drucks und des spezifischen Volumens zusammensetzt.

$$h = e + p v \quad 2.31$$

Die beiden physikalischen Größen e und h sind für die hier betrachteten perfekten Gase reine Funktionen der Temperatur.

$$de = c_v dT \quad 2.32$$

$$dh = c_p dT \quad 2.33$$

Da c_v und c_p unter der Annahme eines perfekten Gases konstante Größen sind, sind die Integrale zur Bestimmung der Größen e und h von einfacher Natur.

$$e = c_v T \quad 2.34$$

$$h = c_p T \quad 2.35$$

Eine Großzahl technischer Strömungen findet unter moderaten Temperaturen und Drücken statt, sodass die Annahme von Luft als perfektes Gas gar bei Strömungsgeschwindigkeiten,

die das Berücksichtigen von Kompressibilitätsfaktoren erfordern, anwendbar bleibt. (Anderson 2017, S. 440–442)

2.2.3 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik und thermodynamische Prozesse

In den Kapiteln 2.2.1 und 2.2.2 werden der Zustand eines Systems und dessen beschreibende Variablen erläutert, ohne den Einfluss der Umgebung auf das System zu berücksichtigen. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ist eine empirische Beobachtung, die durch Experimente validiert wurde und die Interaktion zwischen System und Umgebung betrachtet. Er wird in Gleichung 2.36 mathematisch dargestellt und beinhaltet die Änderung der inneren Energie de durch den Austausch von Wärme dq und Arbeit dw mit der Umgebung.

$$de = dq + dw \quad 2.36$$

Die Größe de ist eine Zustandsgröße und hängt nicht von der Art eines Prozesses, sondern nur von dem Anfangs- sowie dem Endwert ab. Im Gegensatz dazu sind die Größen dq und dw prozessspezifische Größen, die an die Art des Prozesses geknüpft sind. Für die meisten technischen Überlegungen finden im Allgemeinen drei Arten von idealisierten Prozessen statt:

- Adiabatischer Prozess – Prozess ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung
- Reversibler Prozess – Prozess in dem keine dissipativen Phänomene auftreten
- Isentropischer Prozess – Prozess, der die Charakteristika der beiden erstgenannten Prozesse verbindet

(Anderson 2017, S. 442–443)

2.2.4 Entropie und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Die Entropie ist eine weitere Zustandsvariable und wird im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik definiert.

$$ds = \frac{dq}{T} + ds_{irr} \quad 2.37$$

Der Quotient in Gleichung 2.37 besteht aus einer Wärmemenge dq , die mit dem System ausgetauscht wurde, und der Systemtemperatur. Die Entropie setzt sich aus diesem Quotienten und den Teil der Entropie zusammen, der durch irreversible dissipative Effekte auftritt. Die auf diese Art erzeugte Teil der Entropie ds_{irr} muss größer/gleich 0 sein, da

dissipative Effekte die Entropie nur erhöhen können. Hierbei stellt der Fall, indem ds_{irr} gleich 0 ist, den Fall eines komplett reversiblen Prozesses dar. Es ergibt sich der Zusammenhang, wie er in Gleichung 2.38 dargestellt ist.

$$ds_{irr} \geq 0 \quad 2.38$$

Aus Gleichung 2.38 und 2.37 ergibt sich, dass auch die gesamte Enthalpie nicht negativ sein darf. Diese Erkenntnis impliziert die Wichtigkeit dieser Zustandsvariable. Sie gibt die naturgegebene Richtung eines physikalischen Prozesses an. Für einen reversiblen Prozess ($ds_{irr} = 0$), lässt sich die Entropie durch Einsetzen von Gleichung 2.34, 2.35 und 2.36 in Gleichung 2.37, durch Zustandsvariablen ausdrücken.

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p dv}{T} \quad 2.39$$

Formt man das Integral von Gleichung 2.39 zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt eines Prozesses, erhält man folgende Formulierung der Entropie für einen reversiblen Prozess:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad 2.40$$

(Anderson 2017, S. 443–445)

2.2.5 Isentropische Zustandsänderung

In Kapitel 2.2.3 wird ein isentropischer Prozess, als Prozess ohne Wärmeaustausch und ohne Auftreten von viskosen Effekten definiert. Mathematisch lassen sich diese Umstände als $dq = 0$ und $ds_{irr} = 0$ in Gleichung 2.37 definieren. Dadurch liefert Gleichung 2.37 die Aussage $ds = 0$. Sie besagt, dass sich die Entropie während eines isentropischen Prozesses nicht ändert. Diese Annahme ist eine sehr kraftvolle Vereinfachung, da sie es erlaubt Beziehungen zwischen den Zustandsvariablen am Anfang- und am Endpunkt eines Prozesses aufzustellen. Diese Beziehungen bauen auf das Nullsetzen von Gleichung 2.40 auf. Durch das Benutzen dieser Gleichung und der allgemeinen Gasgleichung, die durch die Annahme eines perfekten Gases valide ist, kann der Zustand am Ende eines isentropischen Prozesses durch das Wissen des Anfangszustandes berechnet werden.

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \frac{T_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{T_1} \quad 2.41$$

(Anderson 2017, S. 445–447)

2.2.6 Definition von totalen Zustandsgrößen

Bei den in den vorhergegangenen Kapiteln genutzten Zustandsvariablen handelt es sich um statische Größen. Statische Größen sind Eigenschaften, die ein Beobachter verspüren würde, der sich auf einem Fluidteilchen mit der Strömung mitbewegen würde. Diese statischen Größen beinhalten nicht die kinetische Energie des Strömenden Elements. Eine totale Zustandsgröße ist z.B. die totale Temperatur T_0 , die verspürt werden würde, wenn ein Element eines strömenden Fluids adiabatisch in Ruhe versetzt würde. Für ein perfektes Gas ergibt das Produkt dieser Temperatur T_0 und der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p die totale Enthalpie h_0 . Mit der vorherigen Betrachtungsweise ist totale Enthalpie auch die Enthalpie, die verspürt werden würde, wenn ein Element eines strömenden Fluids adiabatisch in Ruhe versetzt würde. Dies heißt wiederum, dass die totale Enthalpie h_0 auch als Summe der statischen Enthalpie und der kinetischen Energie ausgedrückt werden kann.

$$h_0 = h + \frac{1}{2} v^2 \quad 2.42$$

Die Wichtigkeit dieser totalen Zustandsgröße in einer stationären, adiabatischen und reibungsfreien Strömung, zeigt sich durch Umformung der Energiegleichung 2.29, die in Kapitel 2.1.4 aufgestellt wurde, zu einem Ausdruck für die Änderung der totalen Enthalpie.

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = 0 \quad 2.43$$

Gleichung 2.43 beinhaltet die Aussage, dass die totale Enthalpie entlang einer stationären isentropischen Strömung konstant ist. Da die totale Enthalpie ein Produkt einer Konstanten und der totalen Temperatur ist, ist auch diese folgerichtig konstant. Durch die Zusammenhänge zwischen den Zustandsvariablen in einer isentropischen Strömung, die im vorhergegangenen Kapitel erläutert werden, sind auch die restlichen totalen Zustandsgrößen e_0 , ρ_0 und P_0 konstant. (Anderson 2017, S. 451–456)

2.3 Grundlagen der angewandten Aerodynamik

Der Hauptteil dieser Arbeit ist die Berechnung der Umströmung eines aerodynamischen Profils anhand verschiedener Verfahren und dem Vergleich dieser, mit der vereinfachten

Berechnung, mit Zuhilfenahme von Potentialströmungen. In diesem Kapitel werden grundlegende Werkzeuge der angewandten Aerodynamik und Verfahren zum Aufbau der Berechnung von Umströmungen mittels Potentialströmungen vorgestellt und erläutert.

2.3.1 Das Geschwindigkeitspotential

Für inkompressible, nicht viskose und rotationsfreie Strömungen existiert eine skalare Funktion, aus der die Geschwindigkeit an jedem Punkt im Strömungsfeld berechnet werden kann. Wird davon ausgegangen, dass die Strömung rotationsfrei ist, dann gilt für das Strömungsfeld die Bedingung:

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0. \quad 2.44$$

Somit gelten für das Strömungsfeld an jeder Stelle die Gleichungen:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad 2.45$$

Zur Herleitung der Gleichung des Geschwindigkeitspotentials, wird folgende Aussage der Vektoranalysis genutzt. Für eine differenzierbare skalare Funktion F gilt:

$$\nabla \times \nabla F = 0. \quad 2.46$$

Bezogen auf Gleichung 2.44, sagt dies aus, dass die Geschwindigkeit \vec{v} der Strömung als Gradient einer skalaren Funktion ϕ beschrieben werden kann.

$$\vec{v} = \text{grad}\phi = \nabla\phi \quad 2.47$$

Die skalare Funktion ϕ wird das Geschwindigkeitspotential genannt, und liefert, soweit bekannt, die Geschwindigkeit \vec{v} an jeder Stelle des Strömungsfeldes. Die Funktion ϕ kann durch das Einsetzen von Gleichung 2.47 und konkreter Randbedingungen, in die für das Problem formulierte Impulserhaltung berechnet werden. (Thermodynamik 2009, S. 266–272)

Für inkompressible und rotationsfrei Strömungen gilt:

$$\nabla^2\phi = 0. \quad 2.48$$

Gleichung 2.48 wird Laplace-Gleichung genannt. Lösungen für die Laplace - Gleichung werden harmonische Funktionen genannt und wurden in der Literatur schon ausführlich betrachtet. Die Laplace-Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung zweiten Grades.

2.3.2 Elementarströmungen

Inkompressible und rotationsfreie Strömungen können durch ein Geschwindigkeitspotential ϕ beschrieben werden, welches eine Lösung der Laplacegleichung ist. Die Linearität der Laplace-Gleichung ermöglicht es, Kombinationen aus einzelnen Lösungen zu formen, da die Summe einer Lösung der Laplace-Gleichung, gleichzeitig auch eine Lösung darstellt.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n \quad 2.49$$

Durch diese Gesetzmäßigkeit lassen sich komplexe Strömungen durch das Superpositionieren einfacherer elementarer Strömungen bilden und beschreiben. (Anderson 2017, S. 206–208)

Die einfachste Form einer Elementarströmung ist die sogenannte gleichförmige Strömung. Dabei handelt es sich um eine geradlinige Strömung, die in eine Richtung orientiert ist.

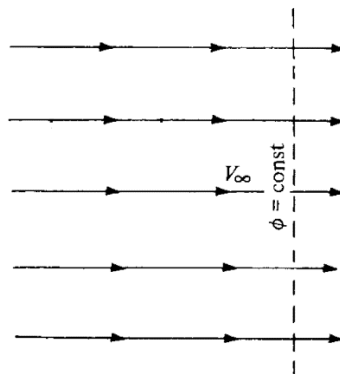


Abbildung 7: Gleichförmige Strömung (angelehnt an Anderson 2017, S. 211)

Betrachtet sei die in Abbildung 7 zusehende inkompressible, rotationsfreie, gleichförmige Strömung mit der Geschwindigkeit v_∞ , die in x-Richtung strömt. Für diese Strömung gibt es ein Geschwindigkeitspotential, das von der Laplace-Gleichung beschrieben wird:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = v_\infty, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad 2.50$$

Um einen Ausdruck für die Funktion ϕ zu finden, müssen die Gleichungen 2.50 nach der X-beziehungsweise Y-Koordinate integriert werden:

$$\phi = V_{\infty} * x + f(y), \quad \phi = \text{Konstante} + g(x) \quad 2.51$$

Vergleicht man beide Funktionen, kann man herauslesen, dass der Term $V_{\infty} * x$ dem Term $g(x)$ entspricht und $f(y)$ die Konstante sein muss. Dadurch und durch den Fakt, dass die Ableitung einer Konstante Null ist, lässt sich folgender Ausdruck für die Potentialgleichung einer gleichförmigen Strömung aufstellen:

$$\phi = V_{\infty} * x \quad 2.52$$

(Anderson 2017, 211-213)

Eine zweite komplexere, elementare Grundströmung ist die Quellen-/Senkenströmung. Sie besteht aus einem zentralen Punkt, aus dem/in den es, wie in Abbildung zu sehen, in alle Richtungen geradlinig heraus-/hineinströmt.

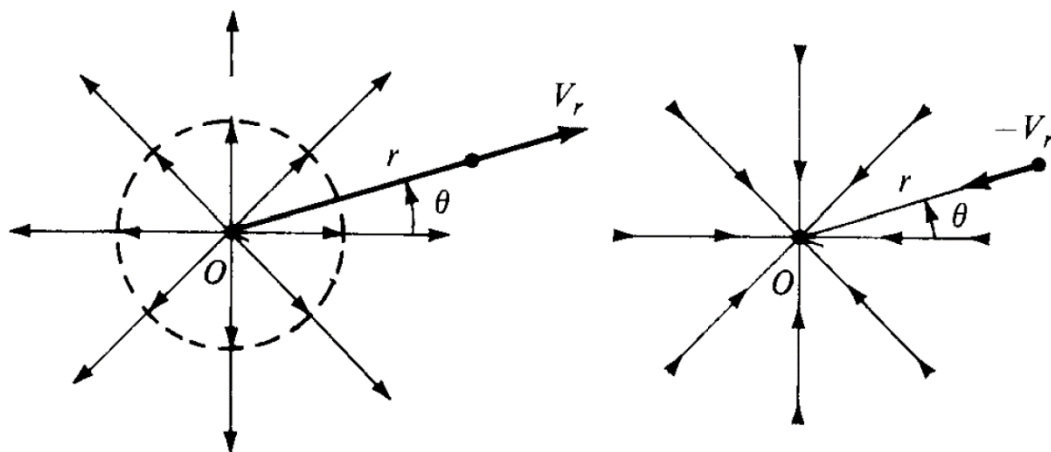


Abbildung 8: Quellenströmung (links) und Senkenströmung (rechts) (angelehnt an Anderson 2017, S. 213)

Die Strömungslinien, die aus dem Ursprung einer solchen Quelle/Senke strömen, besitzen eine Geschwindigkeit $v_r = \frac{\text{Konstante}}{r}$ in radialer Richtung, die mit dem Radius abnimmt. Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Strömungsrichtung v_{θ} ist gleich null. Die Konstante beschreibt die Stärke des Elements als einen Massenstrom, der durch das Element gefördert wird und sich im zweidimensionalen Fall als $\Lambda = 2 \pi r v_r$ definieren lässt. Dadurch, dass zwei Ausdrücke für die beiden Geschwindigkeitskomponenten gebildet wurden, lässt sich schließlich das Geschwindigkeitspotential für eine Quelle-/Senkenströmung, ähnlich wie

im vorigen Kapitel durch Integration ermitteln. Der Zweckmäßigkeit wegen, werden in diesem Fall Polarkoordinaten genutzt:

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r + f(\theta), \quad \phi = \text{Konstante} + g(r) \quad 2.53$$

Analog zum vorangegangenen Kapitel, formuliert sich das Geschwindigkeitspotential einer Quellen-/Senkenströmung als

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r. \quad 2.54$$

(Anderson 2017, S. 213–215)

Die letzte hier behandelte Elementarströmung ist die Wirbelströmung. Die Wirbelströmung besitzt Strömungslinien in Form von konzentrischen Kreisen um einen Ursprung herum. Die Geschwindigkeit auf einer dieser Linien ist konstant und variiert mit dem Abstand eines Kreises vom Ursprung.

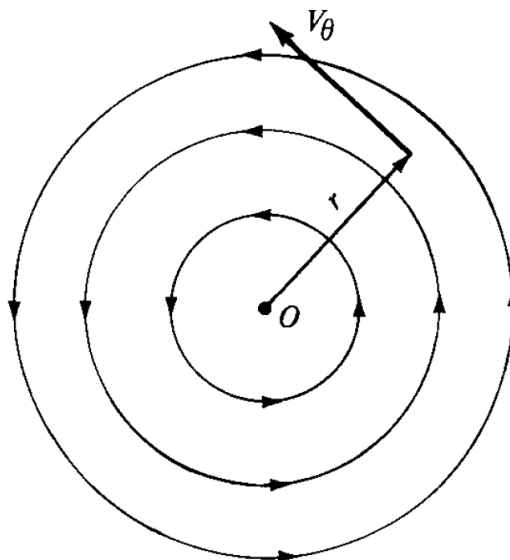


Abbildung 9: Wirbelströmung (Anderson 2017, S. 230)

Die radiale Geschwindigkeit v_r beträgt im gesamten Strömungsfeld des Wirbels Null. Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu dieser v_θ ändert sich analog zu der Radialgeschwindigkeit der vorher erläuterten Quellen-/Senkenströmung umgekehrt proportional zum Abstand zum Ursprung. Auf dieselbe Weise wie die Quell-/Senkenströmung

eine Stärke besitzt, besitzt auch die Wirbelströmung eine Wirbelstärke. Diese wird auch Zirkulation genannt und ist gleichzeitig eine eigenständige aerodynamische Größe, die auch als Kurvenintegral des Skalarproduktes der Geschwindigkeit \vec{v} und dem zugehörigen Streckenabschnitt \vec{ds} definiert werden kann. Auf diese Art kann die Wirbelstärke folgendermaßen beschrieben werden:

$$\Gamma = - \oint \vec{v} \cdot \vec{ds} = -v_{\theta} (2\pi r) \quad 2.55$$

Daraus ergibt sich die v_{θ} , woraus sich schließlich auf dieselbe Weise, wie bei den vorherigen Integrationen, das Geschwindigkeitspotential berechnen lässt:

$$\phi = - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad 2.56$$

(Anderson 2017, S. 229–231)

2.3.3 Superpositionsprinzip

Im vorherigen Kapitel werden die Funktionen der Geschwindigkeitspotentiale einfacher Elementarströmungen definiert. Diese haben nur eine begrenzte technische Verwendung, da reale Strömungen viel komplexer sind. Jedoch lassen sich diese realen Strömungen durch Kombinationen der Elementarströmungen sehr gut annähern. Die Linearität der Laplace-Gleichung wurde bereits angesprochen und ist die mathematische Voraussetzung für das Superpositionsprinzip.

Betrachtet sei die in Abbildung 10 bildlich dargestellte Kombination einer gleichförmigen Strömung und einer Quellenströmung:

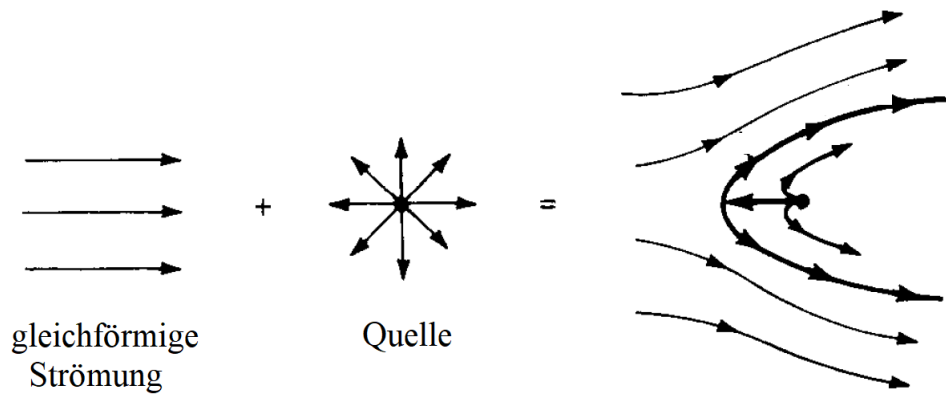


Abbildung 10: Superposition zweier Elementarströmungen (angelehnt an Anderson 2017, S. 218)

Die in Abbildung 10 auf der rechten Seite der Gleichung dargestellte kombinierte Strömung, ist in ihrer Natur komplexer als die beiden elementaren Strömungen. Somit gibt es keine offensichtliche Lösung für ein Geschwindigkeitspotential. Im Gegensatz dazu, sind die Funktionen der Geschwindigkeitspotentiale der beiden Elementarströmungen als Gleichung 2.52 und 2.54 bekannt und können durch ihre Linearität addiert werden, um ein Geschwindigkeitspotential für die kombinierte Strömung zu liefern.

$$\phi = V_{\infty} * r \cos(\theta) + \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \quad 2.57$$

Die Linearität wirkt sich ebenfalls direkt auf die Ableitung des Potentials aus und erlaubt es, die Differentiale direkt zu summieren. Hierdurch lassen sich durch Anwendung des Superpositionsprinzips, die Geschwindigkeiten der kombinierten Strömung, auf dieselbe Weise berechnen, wie für die Elementarströmungen. Dies eröffnet die Möglichkeit, mit der Kombination von mehreren Elementarströmungen, viel komplexere und realitätsgetreuere Strömungen mit Funktionen für die Geschwindigkeitspotentiale zu beschreiben (Anderson 2017, S. 217–218)

2.3.4 Panelverfahren

Die klassische Panelverfahren zur Berechnung der Umströmung eines Körpers, beruht auf dem Superpositionsprinzip von bekannten Lösungen der Laplace-Gleichung verschiedener Elementarströmungen, welches am Anfang dieses Kapitels erläutert wird. Die Berechnung einer Umströmung mit der Panelverfahren, ist auf die Annahme einer Potentialströmung begrenzt und besitzt somit dieselben Begrenzungen, sprich Inkompressibilität, Vernachlässigung viskoser Effekte und Rotationsfreiheit.

In Kapitel 2.3.3 wird gezeigt, dass eine bestimmte Kombination zweier Elementarströme eine spezielle Strömung bilden und eine Funktion für das passende Geschwindigkeitspotential liefert. Jedoch ist dies nur eine indirekte Methode, welche das Ergebnis einer gegebenen Kombination liefert, und nicht dafür eingesetzt werden kann, eine bestimmte Zielströmung zu erhalten. Um nun eine Strömung um einen gewünscht beliebig geformten Körper durch dasselbe Prinzip zu bilden, gebrauch es dem Panelverfahren. Sie ist eine direkte Methode, die es erlaubt, eine Verteilung von Elementarströmungen insofern zu berechnen, dass sie in Kombination mit einer gleichförmigen Anströmung, die Umströmung um den gewünschten Körper widerspiegelt. Die verschiedenen Panelverfahren unterscheiden sich in der Wahl der Elementarströmungen, welche genutzt werden, um die Umströmung zu formen. Eine einfache Form dieser Methode ist das zweidimensionale Quellpanelverfahren, welche eine Verteilung von Quellen- und Senkenströmungen nutzt. Diese besitzen grundsätzlich keine Zirkulation und können daher nur für Umströmungen genutzt werden, die keinen Auftrieb erzeugen. In Kapitel 2.3.2 wird eine Quellen- bzw. Senkenströmung mit einer zweidimensionalen Ausbreitung im Raum betrachtet und die Stärke Λ dieser als Volumenstrom pro Längeneinheit in Richtung der Z-Achse gegeben. Hier wird eine Verteilung von unendlich vielen infinitesimal kleinen Quell-/Senkensingularitäten mit einer jeweiligen Stärke von λ auf einer in Abbildung zusehenden Kurve \overline{ab} betrachtet:

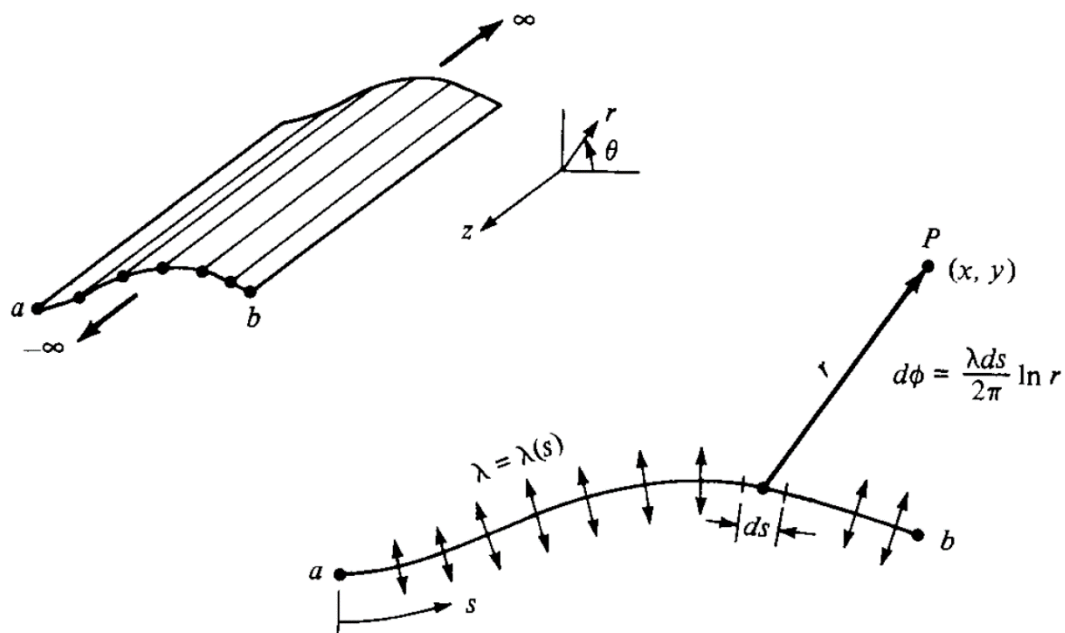


Abbildung 11: Quell-/Senkenverteilung (angelehnt an Anderson 2017, S. 248)

Analog zu dem Geschwindigkeitspotential einer Quellen- bzw. Senkenströmung, besitzt auch eine solche Verteilung infinitesimal kleiner Singularitäten relativ zu einem Punkt P ein Geschwindigkeitspotential von

$$d\phi = \frac{\lambda ds}{2\pi} \ln r \quad 2.58$$

wobei s die Fortschrittsvariable entlang der Kurve \overline{ab} beschreibt. Integriert über die gesamte Kurve, ergibt dies eine Potential von

$$\phi = \int_a^b \frac{\lambda ds}{2\pi} \ln r. \quad 2.59$$

Beispielhaft sei ein beliebig geformter Körper, wie in Abbildung 12 bildlich dargestellt, von einer gleichförmigen Strömung angeströmt:

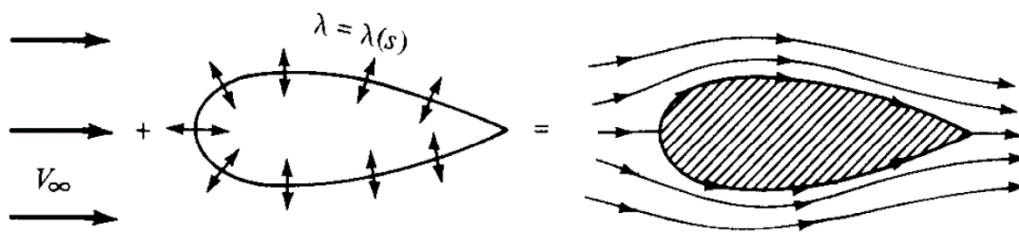


Abbildung 12: Umströmung eines beliebig geformten Körpers (angelehnt an Anderson 2017, S. 249)

Um mit dem Quellpanelverfahren diesen Fall zu berechnen, wird eine Quellen-/Senkenverteilung auf der Oberfläche des Körpers positioniert und die Stärke $\lambda(s)$ so gewählt, dass die Kombination der Verteilung, zusammen mit der Anströmung, die Strömung um genau diesen Körper widerspiegelt. Es erscheint logisch, dass dies mit einer einzigen Verteilung mit einer Stärke $\lambda(s)$ nicht zu erreichen ist. Deshalb wird der Gedanken des „Panels“ eingeführt. Die Kontur des Körpers wird in eine Anzahl von Panels eingeteilt, wovon jedes eine auf dem Panel konstante Stärke $\lambda_j(s)$ besitzt. Das Ziel des Panelverfahren ist es, diese als unbekannt angenommen Stärken der Panels insofern zu berechnen, als das die Kontur des gewünschten Körpers zu einer Stromlinie der Strömung wird. Dies wird dadurch erreicht, dass jedem Panel ein Kontrollpunkt z.B. in der Mitte des Panels zugewiesen wird und diesem eine Randbedingung aufgezwungen wird, welche besagt, dass die normale Komponente der Geschwindigkeit an diesem Punkt gleich Null ist. Diese Randbedingung ist

mathematisch formuliert ein Ausdruck für die normal Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Panelstärken. Um diesen Ausdruck aufzustellen sei das Geschwindigkeitspotential eines Panels (Gleichung 2.59) auf einen Punkt bezogen. Dies ergibt abgeleitet somit einen Ausdruck für die von einem Panel induzierte Geschwindigkeit an diesem Punkt P.

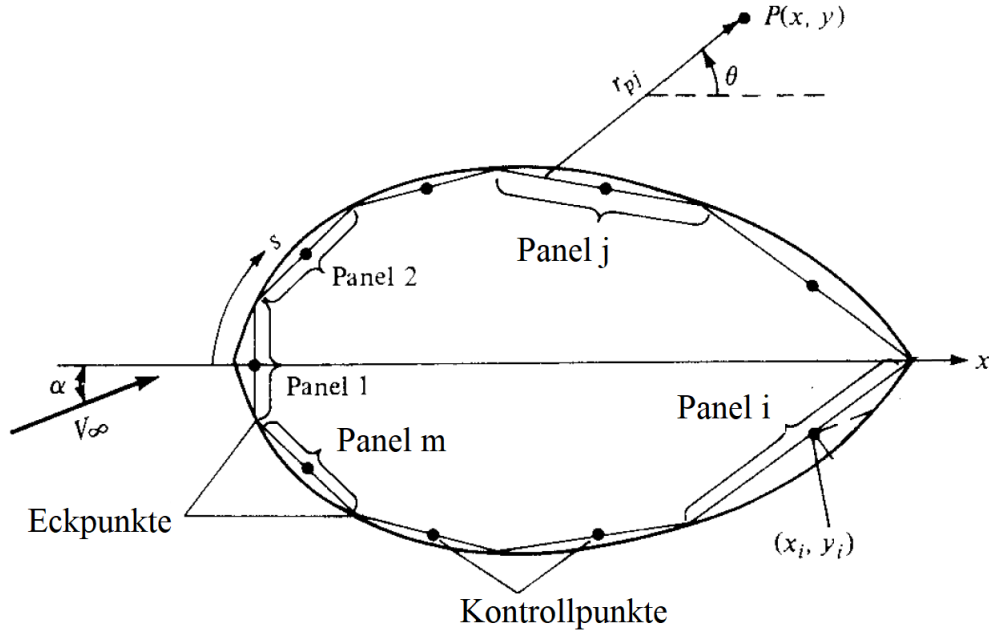


Abbildung 13: In Panel eingeteilter Körper (angelehnt an Anderson 2017, S. 249)

Eine Summe der Potentiale aller Panels auf diesen Punkt P bietet einen mathematischen Ausdruck für die gesamt induzierte Geschwindigkeit an diesem Punkt.

$$\phi_{Q/S}(P) = \sum_{j=1}^n \phi_j = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_a^b \ln r_{pj} ds \quad 2.60$$

Wird nun Gleichung 2.60 auf dem Kontrollpunkt eines Panels i ausgewertet, liefert dies folglich einen Ausdruck für das von allen Panels j induzierte Geschwindigkeitspotential an einem Kontrollpunkt i.

$$\phi_{Q/S}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_a^b \ln r_{ij} ds \quad 2.61$$

Bildet man zur Berechnung der Geschwindigkeit die Ableitung dieses Potential, erscheint der Radius r_{ij} im Nenner und ergibt für den Fall $i=j$ eine Singularität. Diese Singularität

beschreibt eine Eigeninduktion von $\frac{\lambda_j}{2}$. Zu der induzierten Geschwindigkeit kommt der Anteil der gleichförmigen Strömung an der Geschwindigkeit in die Richtung der Normalen des Panels:

$$v_{\infty,n} = \vec{v}_{\infty} \cdot \vec{n}_i = v_{\infty} * \cos \beta_i \quad 2.62$$

wobei \vec{n}_i der Normalenvektor eines Panels i und β_i der Winkel zwischen der Panelorientierung und Anströmung ist. Aus diesen beiden Anteilen ergibt sich nun der mathematische Ausdruck für die Geschwindigkeit in Richtung der Normalen des Panels an seinem Kontrollpunkt:

$$v_{n,i} = \frac{\lambda_j}{2} + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_a^b \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds + v_{\infty} * \cos \beta_i \quad 2.63$$

Gleichung 2.63 ist die Herausforderung des Panelverfahrens. Sie ist ein mathematischer Ausdruck, durch Induktion aller vorhandenen Panels, für die Geschwindigkeit in Richtung der Normalen eines Panels, welcher nur noch von den Unbekannten Panelstärken λ_j und der Panelgeometrie in Form von r_{ij} abhängt. Wird Gleichung 2.63 nun für alle Panels gleich Null gesetzt, ist die oben genannte Randbedingung aufgestellt. Je nach Wahl der Anzahl der Panels n und deren Geometrie und Ausrichtung zueinander, ergibt diese Logik ein bestimmtes lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n unbekannten Quellstärken, die eine Umströmung des gegebenen Körpers widerspiegeln. Mithilfe der berechneten Quellstärken lässt sich umgekehrt direkt die Tangentialgeschwindigkeit an allen Kontrollpunkten berechnen. Durch das Wissen der Tangentialgeschwindigkeit lassen sich mit den in Kapitel 2.2 beschriebenen Werkzeugen andere maßgebliche Eigenschaften der Umströmung berechnen. (Anderson 2017, S. 247–252)

Die am Anfang dieses Kapitels angesprochene Beschränkung auf Umströmungen, die keinen Auftrieb erzeugt, kann durch die Hinzunahme von analogen Wirbelströmungsverteilungen auf den Panels aufgehoben werden. Analog zu der im vorherigen Teil dieses Kapitels erläuterten Vorgehensweise, ist folgende Gleichung der mathematische Ausdruck für das Potential einer Wirbelverteilung:

$$\Phi_W(x_i, y_i) = - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_a^b \theta_{ij} ds \quad 2.64$$

wobei γ_j analog die konstante Stärke der Wirbelverteilung eines Panels und θ_{ij} der Winkel zwischen zwei betrachteten Panels ist. Im Gegensatz zu den Quellen Panels, ist der eigeninduzierte Anteil des Wirbelpanels, also im Falle $j=i$, gleich Null. Für den vereinfachten Fall, bei dem die Wirbelverteilungen auf sämtlichen Panels die gleiche Stärke γ besitzen, ergibt sich für den nullzusetzenden Anteil der Geschwindigkeit an einem Kontrollpunkt folgende Gleichung:

$$v_{n,i} = \frac{\lambda_j}{2} + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_a^b \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds - \sum_{j=1(j \neq i)}^n \frac{\gamma}{2\pi} \int_a^b \frac{\partial}{\partial n_i} (\theta) ds + v_\infty \quad 2.65$$

$* \cos \beta_i$

Das sich aus diesen n Gleichungen bildende Lösungssystem, beinhaltet nun jedoch $n+1$ Unbekannte Variablen und ist somit nicht ausreichend bestimmt. Aus diesem Grund wird hier eine weitere Gleichung in Form der Kutta-Kondition zur Lösung verwendet. Die Kutta-Kondition ist eine Bedingung, welche das gleichmäßige Verlassen der Strömung an der Hinterkante eines Profils sichert. Sie lässt sich mit verschiedenen Herangehensweisen festlegen und wird in dieser Arbeit dadurch festgelegt, dass die Tangential Geschwindigkeit am Kontrollpunkt des Panels, auf der Oberseite des Panels der Hinterkante, gleich dem Negativen der, der des gegenüberliegenden Panels auf der Unterseite ist. (G. Dimitriadis)

3 Impulspotential

Im vorherigen Kapitel wird das Geschwindigkeitspotential einer Strömung definiert und hergeleitet. Die Anwendung der lang bekannten Potentialtheorie mit ihren diversen Varianten und daraus abgeleiteten Verfahren wie z.B. das Singularitätenverfahren, das Panelverfahren oder auch die Jukowski-Abbildung ist ein gesicherter Weg, um das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ einer inkompressiblen Strömung zu berechnen. Im Folgenden wird die Idee eines Impulspotentials einer Strömung vorgestellt, für das die gleichen Verfahren und Methoden verwendet werden können, um das Feld des Impulses $\rho \vec{v}(\vec{x})$ in einer kompressiblen Strömung berechnen zu können.

3.1 Definition und Herausforderungen des Impulspotentials

Das Potential des volumenspezifischen Impulses ω , kurz Impulspotential, ist eine zentrale Größe in der nachfolgenden Betrachtung. Wir haben die Bezeichnung gewählt, weil sie analog zum bekannten Geschwindigkeitspotential der Potentialtheorie ist. Dort ist die Divergenz eines Geschwindigkeitspotentials Φ gleich der Geschwindigkeit selbst, also $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = v_i$. In unserer Betrachtung ist die Divergenz des Impulspotentials ω gleich dem volumenspezifischen Impuls, also $\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \rho v_i$. Die Einführung eines solchen Impulspotentials ist insofern erfolgsversprechend, da es im Gegensatz zu dem Geschwindigkeitspotential auch für eine nicht konstante Dichte ρ die Massenbilanz erfüllt. Es kann gezeigt werden, dass sowohl für isentrope als auch polytrope Strömungen auch die Energiebilanz erfüllt wird. Als dritte Bilanzgleichung ist die Impulsbilanz zu überprüfen. Es zeigt sich, dass sie nur dann erfüllt ist, wenn eine isentrope, rotationsfrei Strömung, für die gilt $\nabla \times \vec{v} = 0$, vorliegt. Das ist in dieser Betrachtung jedoch nicht der Fall. Hier ist zwar die Rotation des Impulses, also $\nabla \times (\rho \vec{v})$, gleich null, aber da ρ nicht konstant ist, ist $\nabla \times \vec{v}$ im Allgemeinen ungleich Null. Die Verletzung der Impulsbilanz in der isentropen Strömung wird evident, wenn wir die Energiebilanz in der Form der Konstanz der Gesamtenthalpie umformen und die Differenz zur Impulsbilanz für die isentrope Strömung bilden. Es wird die Änderung der Gesamtenthalpie in folgender Form betrachtet und als konstant angenommen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(c_p T + \frac{1}{2} v^2 \right) = 0 \quad 3.1$$

Die Annahme idealen Gases erlaubt es Gleichung 3.1 in folgender Form auszudrücken:

$$\frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad 3.2$$

Die Impulsbilanz aus Kapitel 2.1.4 wird an dieser Stelle nochmal aufgegriffen durch die Dichte ρ geteilt und in folgender Form dargestellt:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad 3.3$$

Nun wird die Differenz der beiden Gleichungen 3.2 und 3.3 gebildet.

$$\left[\frac{\chi}{\chi-1} \frac{p}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] + v_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad 3.4$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann nur für den Fall zu Null werden, für den $\nabla \times \vec{v} = 0$ gilt. Daraus folgt, dass die Berechnung von rotationsbehafteten Strömungen mit dem Impulspotential die Impulserhaltung verletzt. Jedoch ist es möglich die Größe des dadurch verursachten Fehlers zu untersuchen. Die Motivation dieser Arbeit ist es zu untersuchen ob dieser Fehler in der Berechnung der Zustandsgrößen und der Geschwindigkeit gering ist und im Hinblick auf den Gewinn, dass hiermit die Kompressibilität korrekt berücksichtigt wird, akzeptiert werden kann.

3.2 Aufteilung des berechneten Impulsfeldes einer isentropen Strömung

Die in Kapitel 2.3 besprochene Thematik des Geschwindigkeitspotential, erlaubt es das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Strömung zu berechnen. Das in diesem Kapitel behandelte Impulspotential liefert behält dieselben Funktion wie das Geschwindigkeitspotential, jedoch liefert es ein Impulsfeld, das durch die Anwendung auf inkompressible Strömungen nicht ohne weiteres in seine Anteile der Geschwindigkeit und der Dichte aufzuteilen ist. Die Aufteilung des Impulsfeldes in ein Dichte- und Geschwindigkeitsfeld ist die Aufgabe dieses Kapitels.

Das mit den Werkzeugen der Potentialtheorie berechnete Impulsfeld einer isentropischen Strömung beschreibt einen Ortbezogenen volumenspezifischen Impuls innerhalb des Strömungsfeldes. Dieser volumenspezifische Impuls besteht aus dem Produkt der Dichte und der Geschwindigkeit an einem Punkt. Da kompressible Strömungen betrachtet werden, ändert sich die Dichte je nach Stärke der Anströmung, Profilkontur und physikalischen Eigenschaften des umströmenden Mediums örtlich mehr oder weniger. Hierdurch ist das Aufteilen des Impulses ohne Weiteres nicht möglich. Das Formulieren des örtlichen reduzierten Massendurchsatzes, der durch das Impulsfeld bekannt ist, macht dies jedoch möglich. Der reduzierte Massendurchsatz ist folgendermaßen definiert:

$$\dot{m}_{red} = \frac{\dot{m} \sqrt{T_0}}{A P_0} \quad 3.5$$

Durch die Zuhilfenahme der Massenbilanz entlang einer Stromröhre, der Zustandsgleichung für ideale Gase, der Gleichung für Schallgeschwindigkeit, der gasdynamischen Beziehung zwischen Machzahl und dem Verhältnis des Druckes zum Ruhedruck und dem Verhältnis der Zustandsgrößen bei adiabatischer Zustandsänderung wird Gleichung 3.5 umgeformt.

$$\dot{m} = \rho v A$$

$$\rho = \frac{P}{R_s T}$$

$$a = \sqrt{\kappa R_s T}$$

$$M = \frac{v}{a} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right]}$$

$$\dot{m}_{red} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \frac{1}{R_s} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad 3.6$$

Gleichung 3.6 ist eine Formulierung des bekannten reduzierten Massendurchsatzes in Abhängigkeit des Isentropenexponenten, der spezifischen Gaskonstante und des Verhältnisses des Druckes zum Ruhedruck. Einen Ausdruck für Letzteres aus bekannten Größen, liefert die Möglichkeit in Verbindung mit isentropischen Beziehungen (Gleichung 3.7) die Dichte oder die Temperatur an einem Punkt durch den reduzierten Massendurchsatz an diesem selben Punkt zu berechnen.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad 3.7$$

Da Gleichung 3.6 nicht durch einfache Umformung nach $\frac{P}{P_0}$ aufzulösen ist, wurde eine Näherung in folgender Form hinzugezogen, welche in der Annahme von Unter- und Überschall aufgeteilt ist:

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_{M<1} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red,max}}\right)^2} + 1 - \left(\left(\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red,max}}\right)^2 \left(1 - 2 \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{2}{1-\kappa}}\right)\right) \right] \right\}^{\frac{\kappa}{2}} \quad 3.8$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_{M>1} = \left\{ \frac{1}{2} \left[-\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red,max}}\right)^2} + 1 - \left(\left(\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red,max}}\right)^2 \left(1 - 2 \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{2}{1-\kappa}}\right)\right) \right] \right\}^{\frac{\kappa}{2}} \quad 3.9$$

Wobei $\dot{m}_{red,max}$ den maximal für einen bestimmten Stoff möglichen reduzierten Massendurchsatz darstellt. Dieser setzt sich wie folgt nur aus den stoffspezifischen Eigenschaften des Isentropenexponenten und der spezifischen Gaskonstante zusammen:

$$\dot{m}_{red,max} = \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(1-\kappa)}} \sqrt{\frac{\kappa}{R_s}} \quad 3.10$$

Das mit der Potentialtheorie berechnete Impulsfeld kann nun durch die Gleichungen 3.9 und 3.10 in ein Dichte- und ein Geschwindigkeitsfeld aufgeteilt werden.

4 Numerische Berechnungsmodelle

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Umströmung eines NACA Profils mit verschiedenen Methoden und Programmen berechnet. Neben der Berechnung der Umströmung mit dem CFD-Programm Ansys-Fluent werden in VBA programmierte Module genutzt, die dieselbe Umströmung, auf der Benutzeroberfläche einer Excel-Arbeitsmappe, berechnen können.

4.1 Allgemeine Parameter der Umströmungen

Alle Berechnungsmodelle berechnen die Umströmung eines NACA0012-Profils mit Luft. Die Dichte der anströmenden Luft soll zwecks besserer Vergleichbarkeit für alle Berechnungen $\rho_\infty = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ betragen. Da die Luft in den Berechnungen als perfektes Gas angenommen wird, gilt für sie die allgemeine Gasgleichung (Gleichung 2.30). Folglich ergeben sich für die anströmende Luft im Unendlichen eine Temperatur von $T_\infty = 348,43\text{K}$ und ein statischer Druck von $p_\infty = 1 \text{ bar}$ sowie die vorher festgelegte Dichte $\rho_\infty = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Die Geometrie des umströmten Körpers ergibt sich durch die Formel für die Berechnung der Dicke eines symmetrischen Vier-Ziffern-NACA0012-Profils ohne Wölbung:

$$y_t(x) = \frac{0,12}{0,2} (0,2969 x^{0,5} - 0,126 x - 0,3516 x^2 + 0,2843 x^3 - 0,1036 x^4) \quad 4.1$$

In Gleichung 4.1 entspricht der Wert 12 im Nenner des Faktors der maximalen Dicke und der Variable x der X-Koordinate, die von 0 (L.E.) bis 1 (T.E.) läuft.

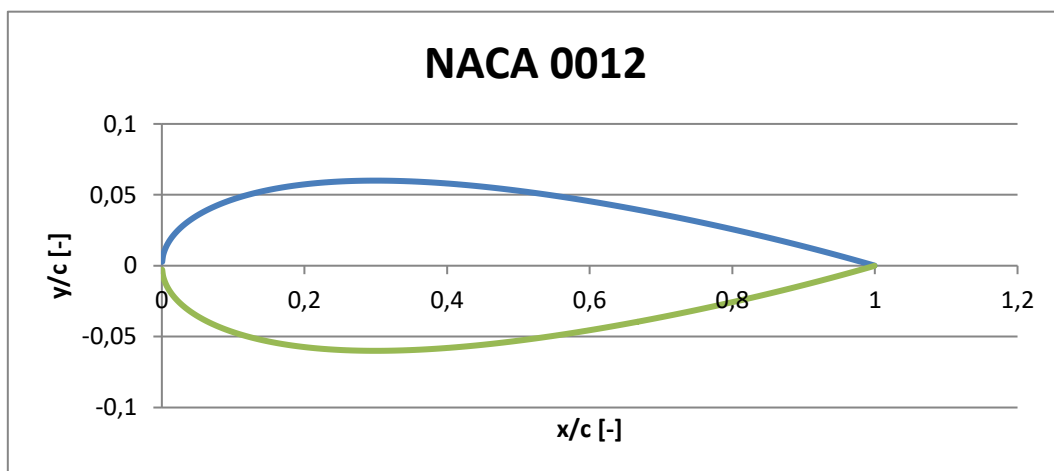


Abbildung 14: NACA 0012 Profil

Es werden mit den verschiedenen numerischen Berechnungsmodellen Umströmungen des Profils mit zwei verschiedenen Anströmgeschwindigkeiten berechnet. Diese zwei Anströmgeschwindigkeiten betragen $v_{\infty,1} = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_{\infty,2} = 240 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Wahl der beiden Anströmgeschwindigkeiten beinhaltet den Gedanken der Erhöhung des Einflusses von Kompressibilitätsfaktoren, der, wie in Kapitel 2.1.2 erläutert, mit dem Anstieg der

Anströmmachzahl ebenfalls steigt. Die grundlegenden Bedingungen, der in dieser Arbeit auf verschiedene Weisen simulierten Umströmungen, sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Tabelle 1: Grundparameter der Simulationen

	Umströmung 1	Umströmung 2
v_{∞}	$200 \frac{m}{s}$	$240 \frac{m}{s}$
M_{∞}	0,5435	0,641
T_{∞}	348,432056 K	
P_{∞}	1 bar	
ρ_{∞}	$1 \frac{kg}{m^3}$	
c_p	$1006,43 \frac{kJ}{kg K}$	
γ	1,4	
$R_s \text{ von Luft}$	287	

4.2 Ansys-Fluent

Fluent ist ein numerisches Simulationstool der Software Ansys, das für fluidmechanische Problemstellungen eingesetzt wird. Um ein Referenzmodell für spätere Vergleiche zu haben, werden die betrachteten Umströmungen in Ansys-Fluent simuliert.

4.2.1 Umströmung NACA0012

Im Gegensatz zu einer FEM-Simulation, wird bei einer fluidmechanischen Simulation nicht ein Körper modelliert, auf den Kräfte wirken, sondern eine Domain modelliert, die den umströmten Körper als negativ umgibt. Um ein NACA Profil zu modellieren, braucht es keine komplexe CAD Software, da ein NACA Profil ein zweidimensionaler Querschnitt eines

Tragflächenprofil ist, dessen Maße vom National Advisory Committee for Aeronautics entwickelt und in einer Vielzahl von Tabellen niedergeschrieben wurde.

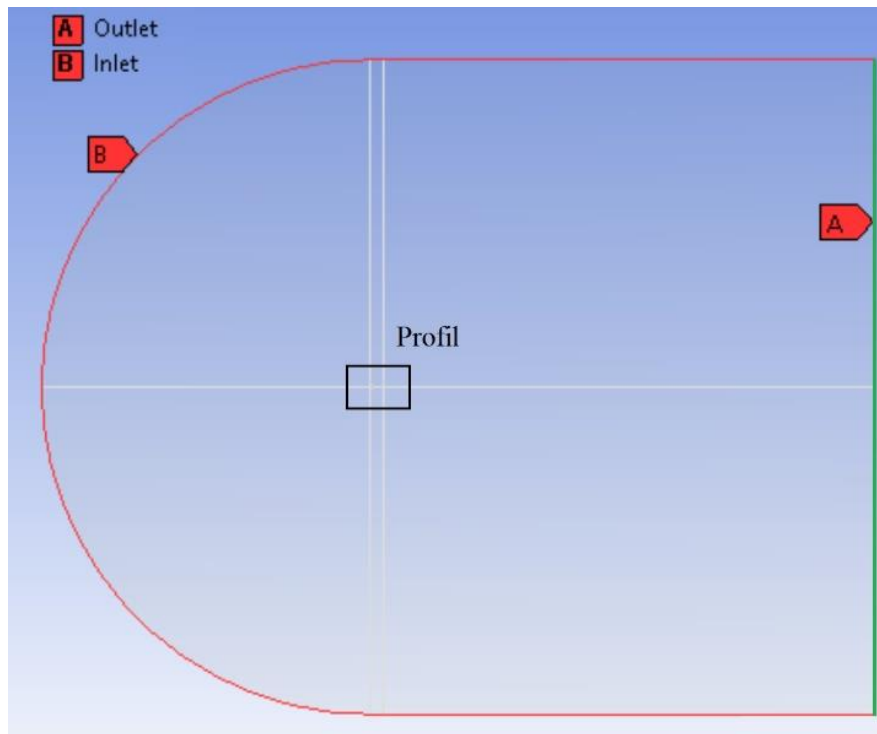


Abbildung 15: Simulationsdomain

Die hier verwendete Geometrie entstammt einer Kurve aus einer Wertetabelle, die das NACA0012 Profil mit 200 Punkten gemäß Gleichung 4.1 mit einer geschlossenen Hinterkante modelliert. Für die Sehnenlänge des Profils wird $c = 1m$ gewählt. In Abbildung 15 ist die zweidimensionale Simulationsdomain zu sehen.

Die Simulationsdomain ist die Umgebung innerhalb deren Grenze die numerischen Berechnungen stattfinden. Sie wird durch den Einlass (Abbildung 15 in rot) und den Auslass (Abbildung 15 in grün) definiert. Der Abstand der Domaingrenzen von der Profilkante wurde ausreichend großdimensioniert, sodass die Auswirkungen, die das Profil auf die Strömung hat, in der Nähe der Domaingrenzen nicht zu spüren sind. Der Abstand beträgt in alle Richtungen mindestens das 20-fache der Sehnenlänge.

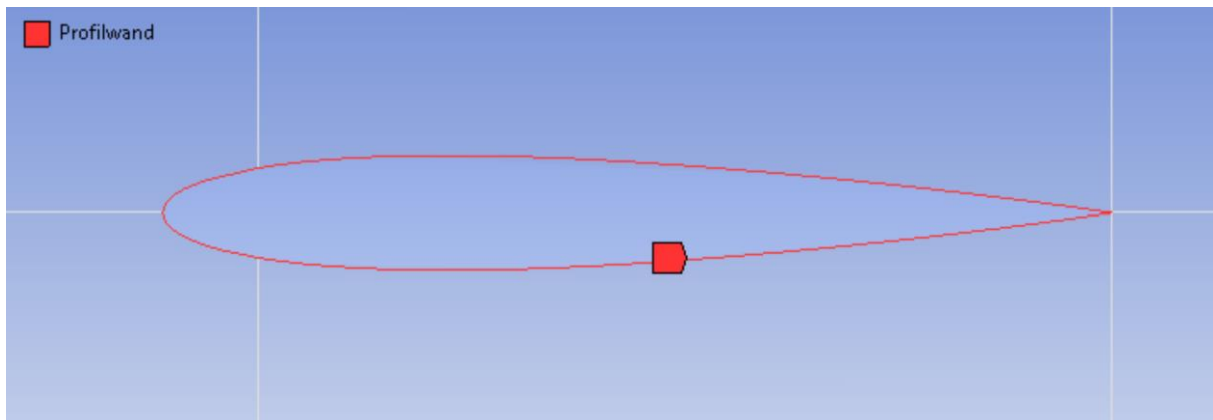


Abbildung 16: Ausschnitt des NACA 0012 Profils aus der vorherigen Abbildung

In Abbildung 16 ist eine Vergrößerung, des in Abbildung 15 angedeuteten Bereichs, indem das Profil modelliert ist, zu sehen. Im folgenden Kapitel wird eine Netzstudie durchgeführt, um eine ausreichende Konvergenz der Ergebnisse zu bestätigen. Das, für den Vergleich in Kapitel 5 genutzte Netz, ist eine Variante des Netzes c, welches eine Verfeinerung in der Region der Vorderkante aufweist.

4.2.2 Netzstudie

Die Ergebnisse und die Rechenzeit einer CFD-Simulation hängen maßgeblich davon ab, wie die Domain vernetzt wurde. Da bei einem feineren Netz, die zu lösenden Gleichungen zunehmen, nimmt auch die Genauigkeit der Ergebnisse zu, allerdings erhöht sich dementsprechend dadurch auch die Rechenzeit. Um ein möglichst ausgeglichenes Modell zu erhalten, müssen beide Aspekte betrachtet werden. Hierzu empfiehlt es sich, im Allgemeinen ein globales grobes Netz zu verwenden und die kritischen Stellen, wie z.B. Radien und die nähere Umgebung des Profils, lokal fein zu vernetzen. Die Kurven, die die Simulationsumgebung aufbauen, werden mit verschiedenen Anzahlen von Einteilungen versehen, um kritische Stelle feiner zu vernetzen. Um ganze Regionen, wie z.B. die von dem Profil weit entfernten Bereiche, von zu feiner Vernetzung zu bewahren, wird in horizontaler und vertikaler Richtung eine Verzerrung eingebaut, die die Elementgröße mit dem Abstand zur Profilwand größer formt. Auf folgender Abbildung ist das größte für diese Netzstudie genutzte Netz und eine Vergrößerung der Region, um das Profil dargestellt:

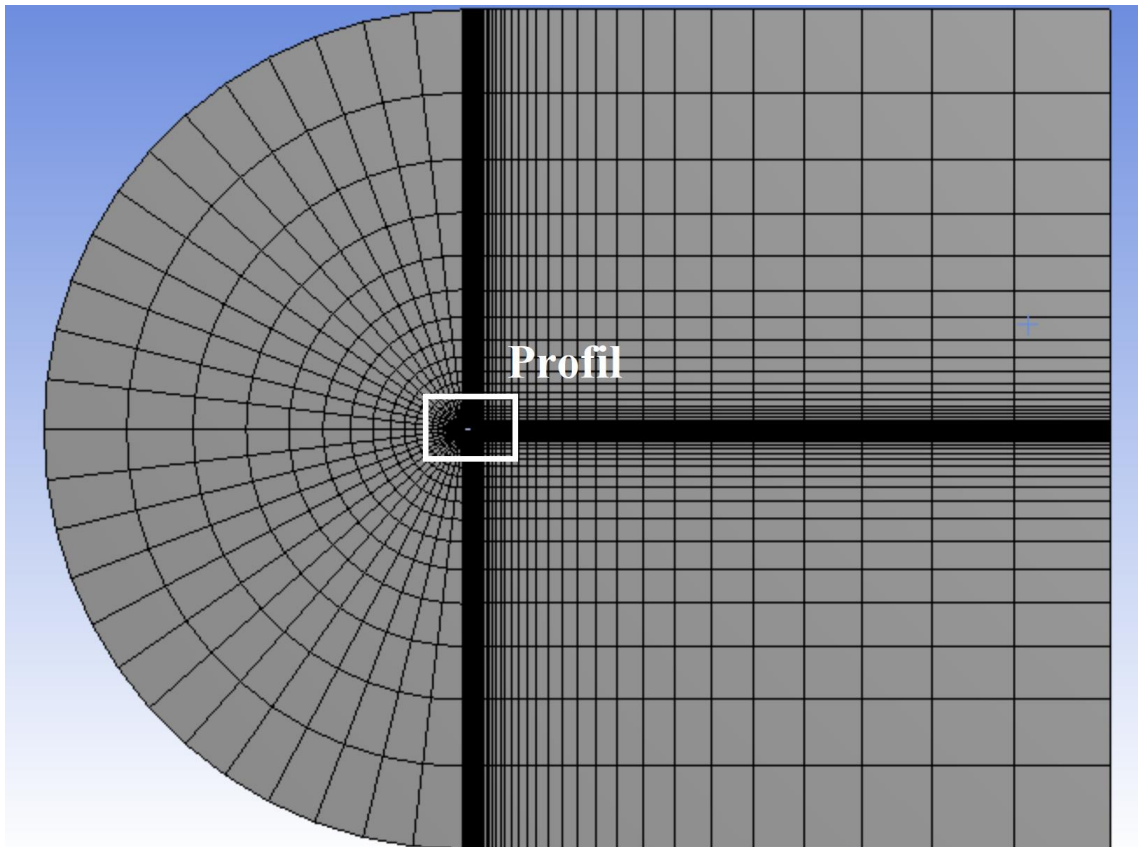


Abbildung 17: grob vernetzte Simulationsumgebung

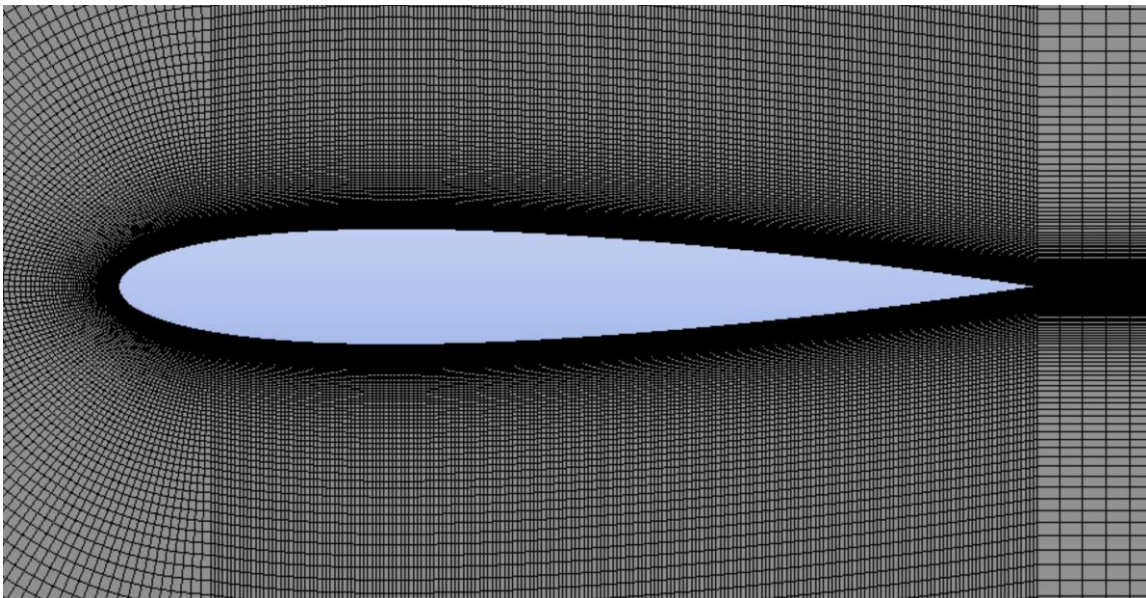


Abbildung 18: Vergrößerung der Region um das Profil

Für die Netzstudie werden für jede Variante der Problemstellung drei verschieden grobe Netze für die Simulation genutzt. Die Elementgrößen aller Regionen werden für die zweite

und dritte Feinheitsstufe jeweils halbiert. In Abbildung 19 ist diese dreistufige Netzverfeinerung bildlich dargestellt:

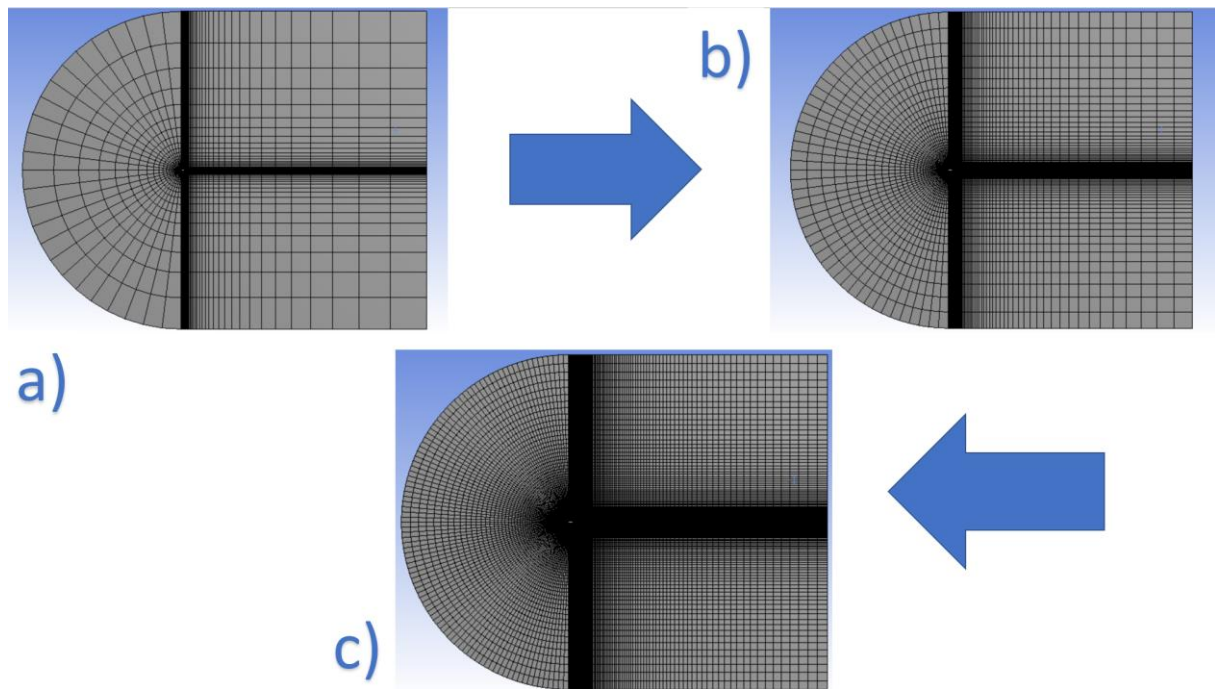


Abbildung 19: Dreistufige Netzverfeinerung

Anhand der berechneten Werte für die Geschwindigkeit des Fluids auf der Profiloberfläche, wird die Konvergenz geprüft. Bei diesem Wert handelt es sich um den maximalen Wert der Geschwindigkeit, welcher im ersten Drittel des Profils erreicht wird. Die Änderung dieser maximalen Geschwindigkeit, zwischen aufeinanderfolgenden Netzverfeinerungen, wird genutzt, um die Konvergenz der Simulation zu bewerten. In den folgenden Tabellen sind die Dimensionen der Netze und die, mit den drei verschiedenen Netzen, für die vier Fälle simulierten Ergebnisse niedergeschrieben:

Tabelle 2: Feinheit der drei Netze

	Netz a	Netz b	Netz c
Knotenanzahl	8900	35000	140800
Elementanzahl	8700	34600	140000

Tabelle 3: Werte der maximalen Geschwindigkeit und Dimensionen der Netze Umströmung 1 inkompressibel

$v_{\infty} = 200 \frac{m}{s}$	Netz a	Netz b	Netz c
--------------------------------	--------	--------	--------

v_{\max}	$227,22 \frac{m}{s}$	$230,96 \frac{m}{s}$	$233,35 \frac{m}{s}$
<i>Relative Abweichung</i>	—	1,62%	1,02%

Tabelle 4: Werte der maximalen Geschwindigkeit und Dimensionen der Netze Umströmung 1 kompressibel

$v_{\infty} = 200 \frac{m}{s}$	<i>Netz a</i>	<i>Netz b</i>	<i>Netz c</i>
v_{\max}	$235,21 \frac{m}{s}$	$238,96 \frac{m}{s}$	$241,6 \frac{m}{s}$
<i>Relative Abweichung</i>	—	1,57%	1,09%

Tabelle 5: Werte der maximalen Geschwindigkeit und Dimensionen der Netze Umströmung 2 inkompressibel

$v_{\infty} = 240 \frac{m}{s}$	<i>Netz a</i>	<i>Netz b</i>	<i>Netz c</i>
v_{\max}	$272,67 \frac{m}{s}$	$277,15 \frac{m}{s}$	$280 \frac{m}{s}$
<i>Relative Abweichung</i>	—	1,62%	1,02%

Tabelle 6: Werte der maximalen Geschwindigkeit und Dimensionen der Netze Umströmung 2 kompressibel

$v_{\infty} = 240 \frac{m}{s}$	<i>Netz a</i>	<i>Netz b</i>	<i>Netz c</i>
v_{\max}	$289,63 \frac{m}{s}$	$293,77 \frac{m}{s}$	$297,64 \frac{m}{s}$
<i>Relative Abweichung</i>	—	1,44%	1,3%

Sämtliche Abweichungen der maximalen Geschwindigkeiten, zu denen des vorherigen Falles, nehmen Werte zwischen maximal 1,62 und minimal 1,02 an. Anhand dieser Werte wird angenommen, dass sämtliche simulierten Fälle vertretbar weit konvergiert sind.

4.3 Panelverfahren

CFD-Simulationen, wie die im vorherigen Kapitel beschriebene Methode, sind zwar ein sehr effektives Werkzeug, um das reale Verhalten von strömenden Fluiden zu simulieren, jedoch sind sie mit einem großen Rechen- und somit auch einem großen Zeitaufwand verbunden. Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, ein aus der Potentialtheorie stammendes Panelverfahren, wie in Kapitel 2.3.4 erklärt, zu modifizieren, damit im Gegensatz zu herkömmlichen Panelverfahren, auch kompressible Strömungen simuliert werden können. Diese Panelverfahren sollen als Modul in einer einfachen Microsoft-Excel-VBA-Umgebung realisiert werden, welches in kürzester Zeit berechnet werden kann.

4.3.1 Berechnungen mit dem Panelverfahren

Die Basis dieser Arbeit ist ein VBA-Modul, das die Umströmung eines NACA 0012 Profils mit einer, wie in Kapitel 2.3.4 erläutert, Kombination aus Quell- und Wirbelpanelverfahren berechnet. Dieses Verfahren berechnet den inkompressiblen Fall der Umströmung mit den am Anfang dieses Kapitels genannten Parametern und allen Eingrenzungen der Potentialtheorie. Diese Variante des Panelverfahrens wird im Rest dieser Arbeit als Panelverfahren 1 bezeichnet. Ein VBA-Modul befindet sich im VBA Fenster und ist in einer herkömmlichen Excel-Arbeitsmappe mit der Tastenkombination Alt+F11 zu öffnen. Das Modul ist derart geschrieben, dass die Eingabe Parameter am Anfang des Scripts festgelegt werden. Abbildung 20 ist ein beispielhafter Ausschnitt aus dem VBA-Modul, das in der Gesamtheit im Anhang zu finden ist, in dem die Randbedingungen für die Berechnungen eingegeben werden. Neben den in Kapitel 4.1 festgelegten allgemeinen Parametern wird hier die Anströmgeschwindigkeit u des Falls gewählt und die Simulationsdomain durch die Einteilung der Geometrie in Panels definiert. Dies geschieht durch die Angabe einer Anzahl n an Einteilung der normierten Sehnenlänge. Des Weiteren ist auch eine Feinheit der Einteilungen in der Region um die Vorder- und Hinterkante durch die entsprechenden Anzahlen der Einteilungen XLE/XTE und ihrer jeweiligen Länge XLE_i/XTE_i möglich. Die durch diese Einteilungen erlangten X-Koordinaten der Anfangs- und Endpunkte der späteren Panels dienen als Funktionswert für die Funktion in Gleichung 4.1 zur Berechnung der dazugehörigen Y-Koordinaten.


```

Sub cp_Naca_V_Q_CP()

'#####
'alles löschen
Worksheets(1).Activate
Application.DisplayAlerts = False
Worksheets("Tabelle1").Delete
Application.DisplayAlerts = True
Application.Worksheets.Add
Worksheets(1).Name = "Tabelle1"
'#####
'Randbedingungen
Dim u As Double
Dim t As Double
Const pi = 3.14159265359
u = 100
alphaa = 0
alpha = alphaa * (pi / 180)
t = 0.12
'#####
'x-koordinaten der einteilung der x-achse
'n Einteilungen der x achse +L.E. + T.E.
'0-P Panels (P=11 => 12 Panels)
'xyb Anzahl der Eckpunkte der Panels (L.E. 2xmal)
'XLE/XTE Anzahl 0.025 abstände auf der X-Achse an LE und TE
Const n = 10
Const p = (2 * n) + 1
Const xyb = (2 * n) + 2
XLE = 2
XTE = 2
XLEi = 0.01
XTEi = 0.01
'Einteilung der Mitte in gleichgroße Segmente
xm = 1 - ((XLE * XLEi) + (XTE * XTEi))
nxm = n - XLE - XTE + 1
xmi = xm / nxm

```

Abbildung 20: Eingabeparameter VBA-Modul

Nach der Eingabe aller Parameter berechnet das Modul nach dem Schema in Kapitel 2.3.4 die Stärken der einzelnen Panels und die daraus resultierenden Strömungsgeschwindigkeiten an allen Punkten des Strömungsfeldes. Aus diesen Geschwindigkeiten werden alle anderen Eigenschaften des Strömungsfeldes mit Zuhilfenahme der festgelegten Annahmen abgeleitet.

Analog zu der in Kapitel 3 beschriebenen Aufteilung des Impulses in eine Geschwindigkeit und einer dazugehörigen Dichte wird dieses VBA-Modul insofern modifiziert, als dass es Kompressibilitätsfaktoren berücksichtigen kann. Hierzu wird anstelle einer Anströmgeschwindigkeit, ein Anströmimpuls definiert, aus dem, analog zum vorherigen Modul, die Impulse an jedem Punkt im Strömungsfeld berechnet werden. An diesem Punkt wird ein Zwischenschritt eingebaut, der die angesprochene Impulsaufteilung vornimmt. Die aus dieser Aufteilung resultierenden Geschwindigkeiten werden anschließend auf dieselbe Weise wie im grundlegenden Modul zur Berechnung der anderen Strömungseigenschaften genutzt. Dieses modifizierte Panelverfahren wird im Rest dieser Arbeit Panelverfahren 2 genannt. Somit stehen zwei VBA-Module zum anschließenden Vergleich mit der CFD-Berechnung zur Verfügung. Das erste grundlegende Modul, das erwartungsgemäß mit der

inkompressiblen CFD-Simulation übereinstimmen sollte und das modifizierte Modul, dessen Ergebnisse eine signifikant keine Abweichung zu der kompressiblen CFD-Simulation haben sollte als das grundlegende Modul.

5 Resultate

Die für die Betrachtungen und Ziele dieser Arbeit wichtigsten berechneten Werte sind die Geschwindigkeit an jedem Punkt im Strömungsfeld und die den volumenspezifischen Impuls formende dazugehörige Dichte. Jegliche andere technisch relevante Strömungsgröße ergibt sich im Zusammenhang mit den gewählten Annahmen über die Natur der Strömung aus der, mit den verschiedenen Berechnungsmodellen simulierten, Geschwindigkeit. Deshalb werden in diesem Kapitel die berechneten Werte der Geschwindigkeit diskutiert, graphisch dargestellt und miteinander verglichen.

5.1 Ansys-Fluent-Simulation

Simulationen mit dem CFD-Programm Ansys-Fluent sind eine bewehrte Methode, um eine reale Strömung widerzuspiegeln. Aufgrund der Genauigkeit einer CFD-Simulation und der durch die Netzstudie belegte Konvergenz der hier durchgeführten Simulationen werden diese als Referenzmodell genutzt. Sie werden die Grundlage eines Vergleichs der verschiedenen Methoden sein.

5.1.1 Inkompressibel

Wie in Kapitel 4.1 angesprochen werden für den inkompressiblen Fall zwei Fälle mit zwei verschiedenen Anströmgeschwindigkeiten simuliert. Die Geschwindigkeitsverläufe auf der Profiloberfläche dieser beiden Simulation werden in zwei Graphen bildlich dargestellt. Da das Profil symmetrisch ist, gelten die in den Graphen dargestellten Werte für Ober- und Unterseite des Profils.

Für die Simulation, bei der eine Anströmgeschwindigkeit von $v_{\infty} = 200 \frac{m}{s}$ bzw. $M_{\infty} = 0,5345$ festgelegt wurde, wird folgenden Geschwindigkeit auf der Profilkontur berechnet:

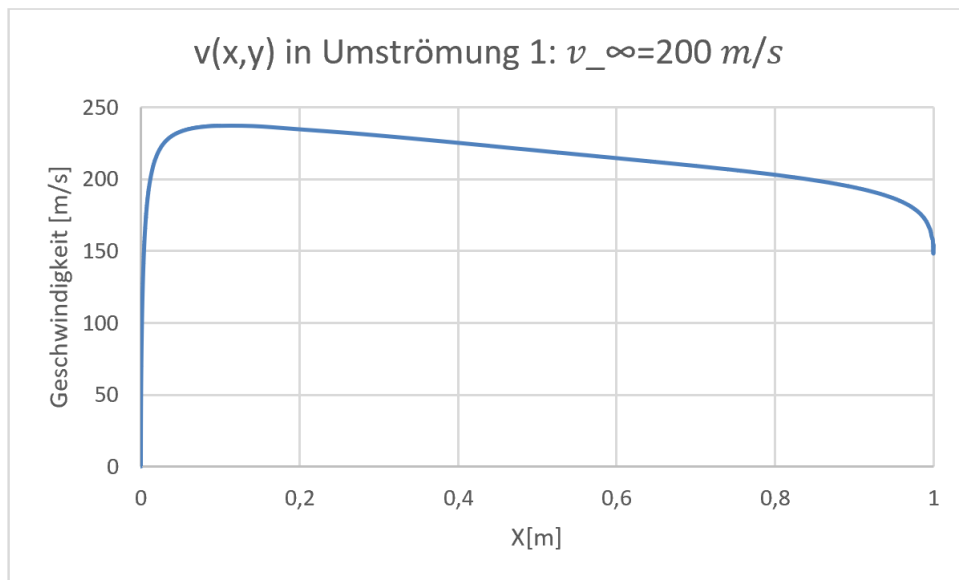


Abbildung 21: Umströmung 1, inkompressibel: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils (Fluent)

In Abbildung 21 ist der Geschwindigkeitsverlauf der Luft auf der Profilkontur über die X-Koordinate auf der Profilschneide aufgetragen. Wie zu erwarten war, existiert an der Vorderkante ein Staupunkt, an dem die Geschwindigkeit Null ist und nach dem die Geschwindigkeit ein Maximum von $237,048 \frac{m}{s}$ anstrebt, um dann in Richtung der Hinterkante wieder abzubremesen. Den Verlauf der Dichte wurde für die inkompressible Rechnung als konstant festgelegt.

Der Graph für dieselbe Größe ist für eine Anströmung mit $v_{\infty} = 240 \frac{m}{s}$ bzw. $M_{\infty} = 0,641$ in Abbildung 22 dargestellt und zeigt denselben Verlauf.

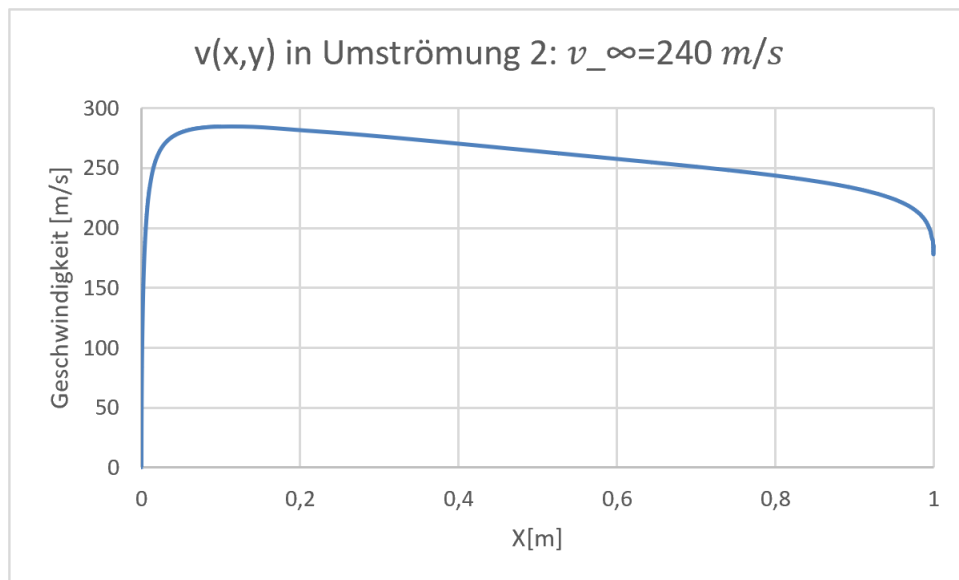


Abbildung 22: Umströmung 2, inkompressibel: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils (Fluent)

5.1.2 Kompressibel

Für die Simulationen, bei denen die Luft als kompressibles Medium angenommen wurde, werden in den folgenden Graphen die Geschwindigkeit und die Dichte auf der Profilkontur für beide Anströmfälle aufgezeigt.

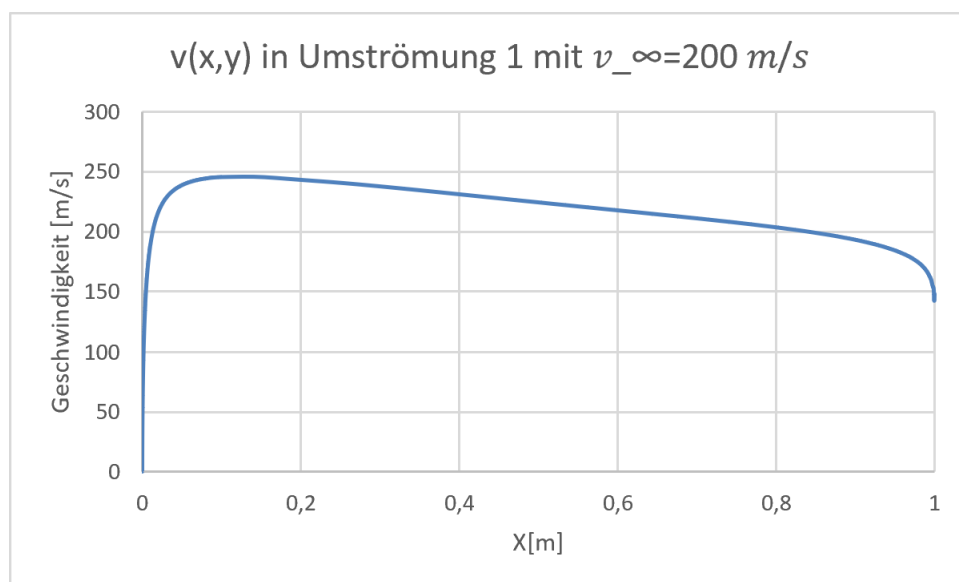


Abbildung 23: Umströmung 1, kompressibel: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils (Fluent)

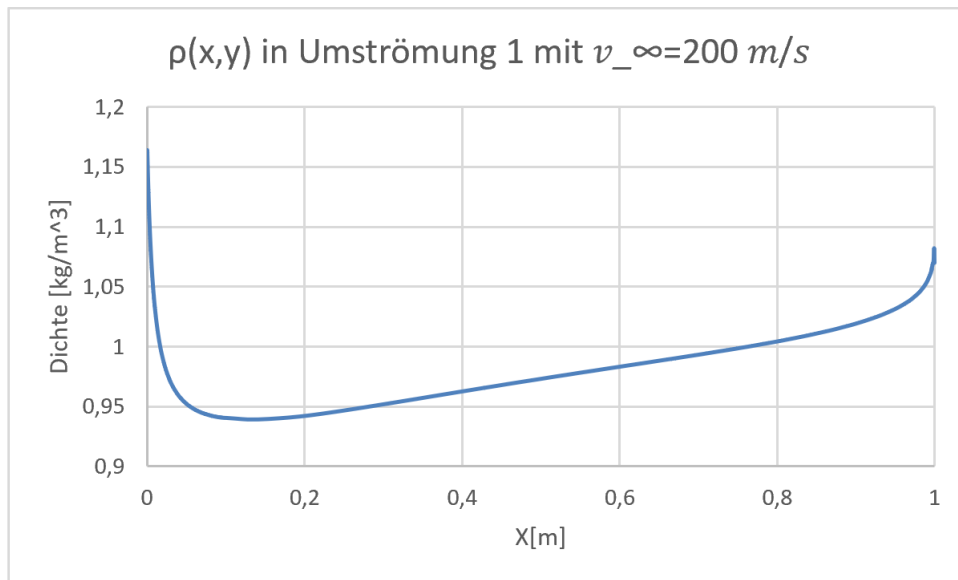


Abbildung 24: Umströmung 1, kompressibel: Dichte auf der Oberfläche des Profils (Fluent)

Die Diagramme der zweiten Simulation sind die folgenden:

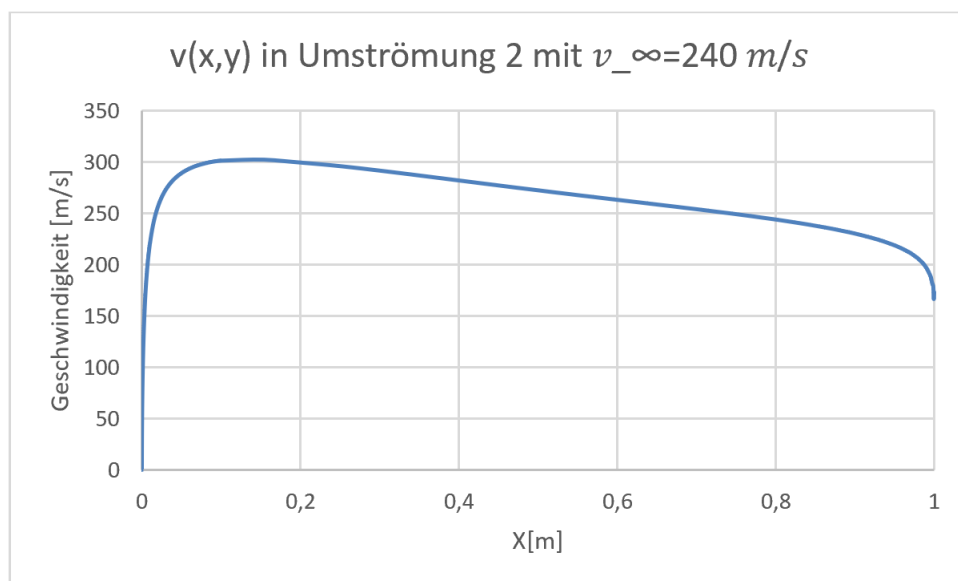


Abbildung 25: Umströmung 2, kompressibel: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils (Fluent)

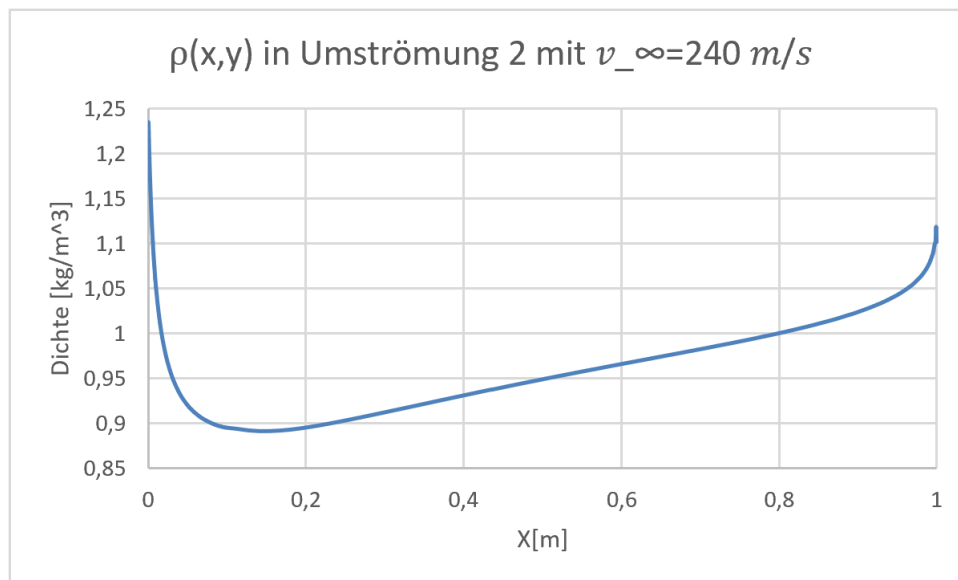


Abbildung 26: Umströmung 2, kompressibel: Dichte auf der Oberfläche des Profils (Fluent)

In der kompressiblen Simulation besitzt die Geschwindigkeit denselben Verlauf wie der der inkompressiblen Rechnung. Der Verlauf der Dichte ist umgekehrt proportional zu dem der Geschwindigkeit.

5.2 Berechnung mit Panelverfahren

Die Berechnungen mit dem Panelverfahren sind der zu testende Teil dieser Arbeit. Es werden in beiden Varianten des Verfahrens die Geschwindigkeiten an den Panelmittelpunkten berechnet, graphisch dargestellt und später mit den Werten der CFD-Simulation verglichen.

5.2.1 Panelverfahren 1: Panelverfahren mit Geschwindigkeitspotential

Das Panelverfahren, das das Geschwindigkeitspotential aus der klassischen Potentialtheorie nutzt, nimmt die Dichte der strömenden Luft als konstant an und berechnet die Geschwindigkeit der Luft im Strömungsfeld. In Abbildung 27 ist der berechnete Verlauf der Geschwindigkeit auf der Kontur des Profils für die Berechnung mit einer Anströmgeschwindigkeit von $v_\infty = 200 \frac{m}{s}$ bzw. $M_\infty = 0,5345$ gezeigt.

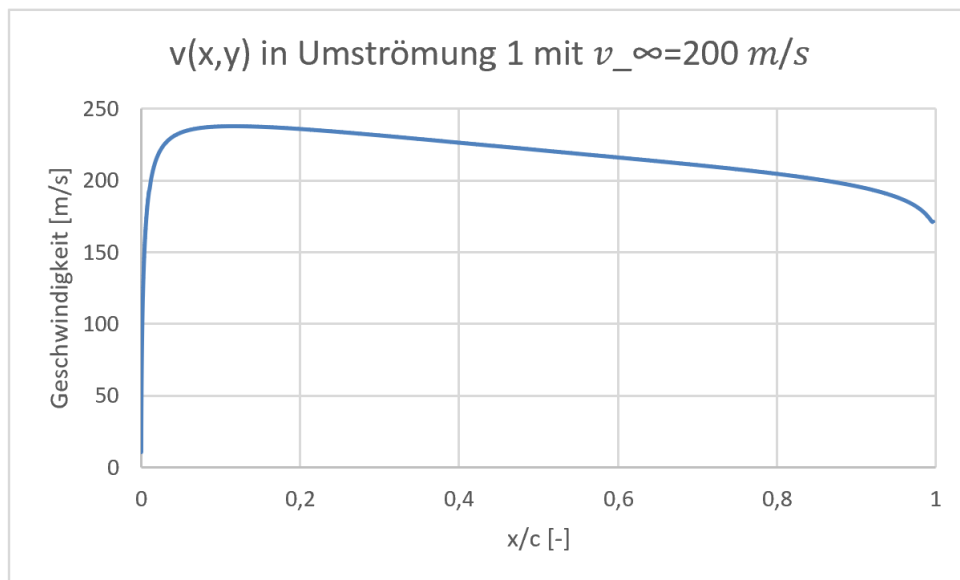


Abbildung 27: Umströmung 1, Panelverfahren 1: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils

Auch mit dem inkompressiblen Panelverfahren wird der zweite Fall mit einer Anströmgeschwindigkeit von $v_{\infty} = 240 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw. $M_{\infty} = 0,641$ berechnet. Der Verlauf der Geschwindigkeit in diesem Fall ist in Abbildung 28 zu sehen.

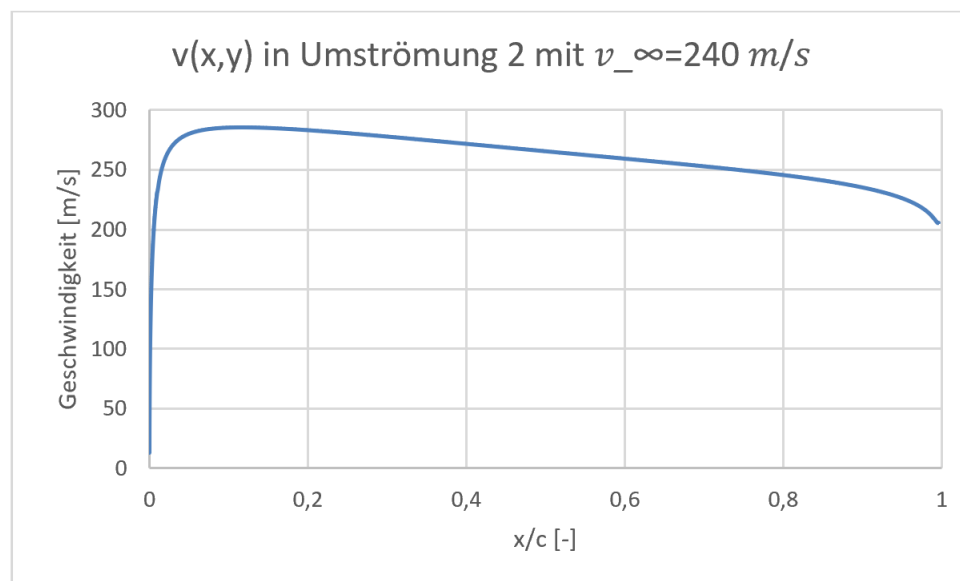


Abbildung 28: Umströmung 2, Panelverfahren 1: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils

5.2.2 Panelverfahren2: Panelverfahren mit Impulspotential

Im Gegensatz zu Panelverfahren 1, ist hier auch der Verlauf der Dichte von Interesse, daher wird diese für dieses Verfahren auch graphisch dargestellt. Die Berechnung von Umströmung 1 mit einer Anströmgeschwindigkeit von $v_\infty = 200 \frac{m}{s}$ bzw. $M_\infty = 0,5345$ liefert folgende Graphen für die Geschwindigkeit und die Dichte auf der Profilkontur:

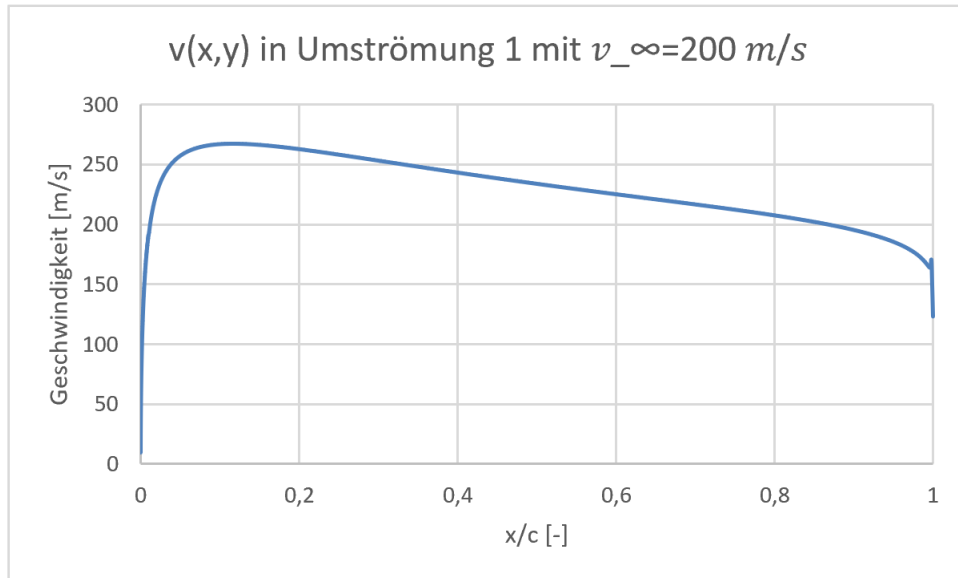


Abbildung 29: Umströmung 1, Panelverfahren 2: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils

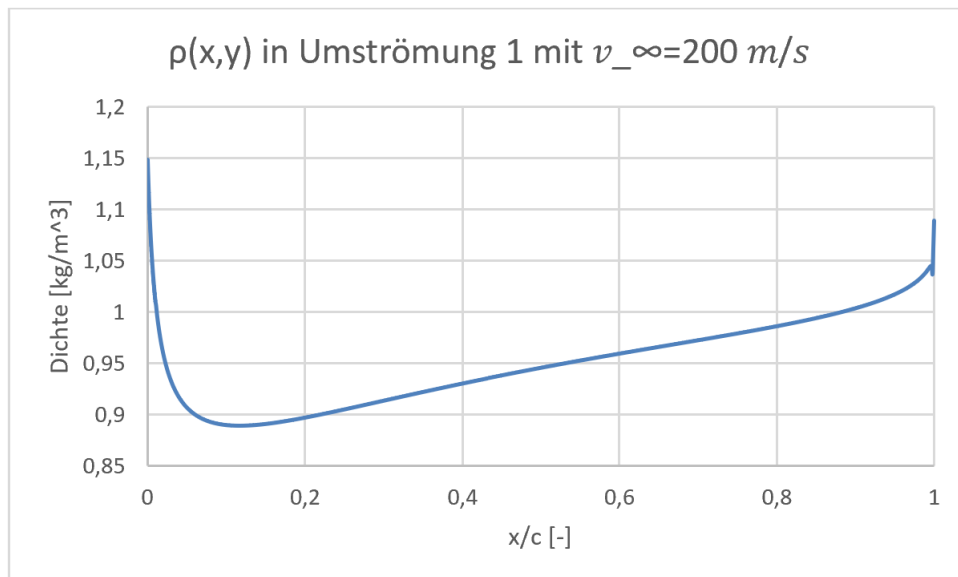


Abbildung 30: Umströmung 1, Panelverfahren 2: Dichte auf der Oberfläche des Profils

Bei der Berechnung von Umströmung 2 mit Panelverfahren 2 werden in einem bestimmten Bereich Geschwindigkeiten berechnet, die im Bereich größer Mach 1 liegen. Das liegt daran,

dass der durch das potentialtheoretische Panelverfahren berechnete volumenspezifische Impuls in dieser Region außerhalb des Gültigkeitsbereich aus Kapitel 3 befindet und somit mit dem Impulspotential keine aussagekräftigen Werte berechnet werden können. Für Umströmung 2 wurde die Anströmgeschwindigkeit dennoch auf den Wert $v_{\infty} = 240 \frac{m}{s}$ festgelegt, da mit dieser Anströmung die maximalen subsonischen Kompressibilitätsfaktoren in der Region um die Vorderkante beobachtet werden können. Für den späteren Vergleich werden nur die Werte, der in den folgenden Graphen dargestellten Regionen von $\frac{x}{c} = 0 - \frac{x}{c} = 0,035$ und $\frac{x}{c} = 0,35 - \frac{x}{c} = 1$ betrachtet:

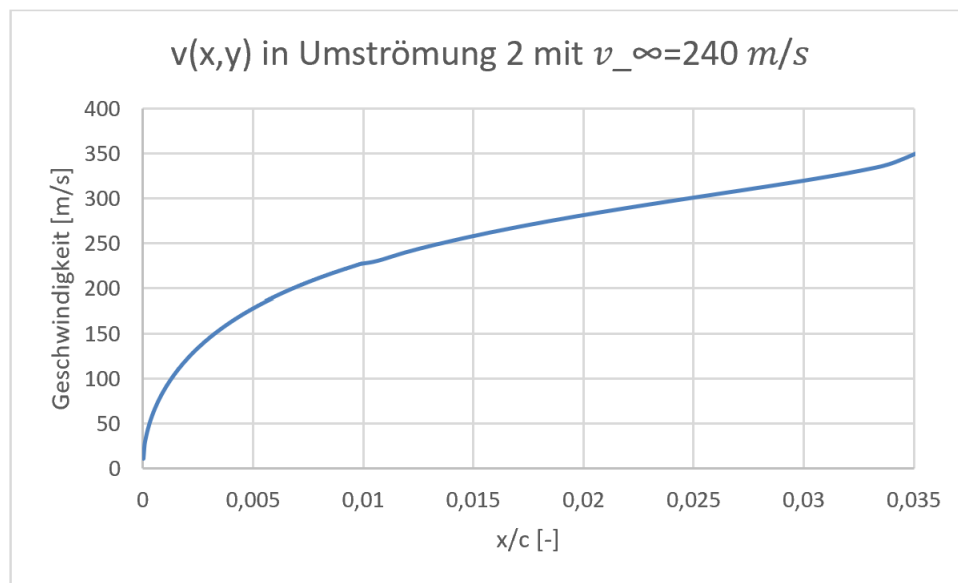


Abbildung 31: Umströmung 2, Panelverfahren 2: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils in der Region um die Vorderkante

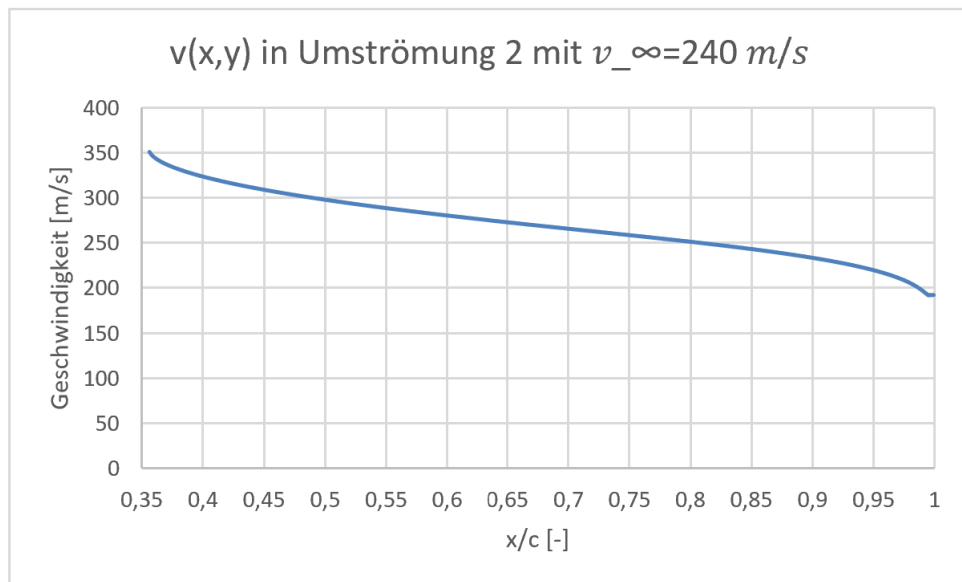


Abbildung 32: Umströmung 2, Panelverfahren 2: Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Profils in der Region um die Hinterkante

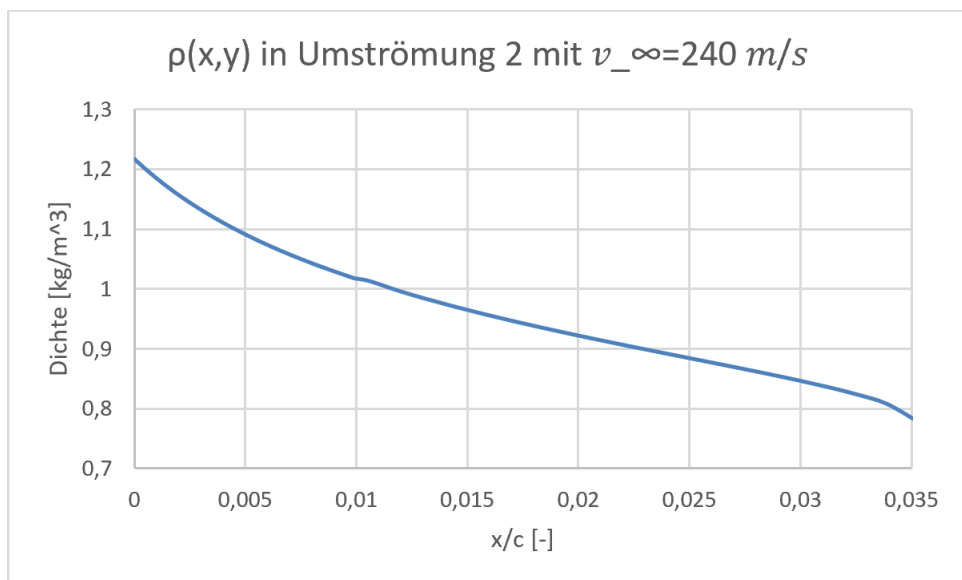


Abbildung 33: Umströmung 2, Panelverfahren 2: Dichte auf der Oberfläche des Profils in der Region um die Vorderkante

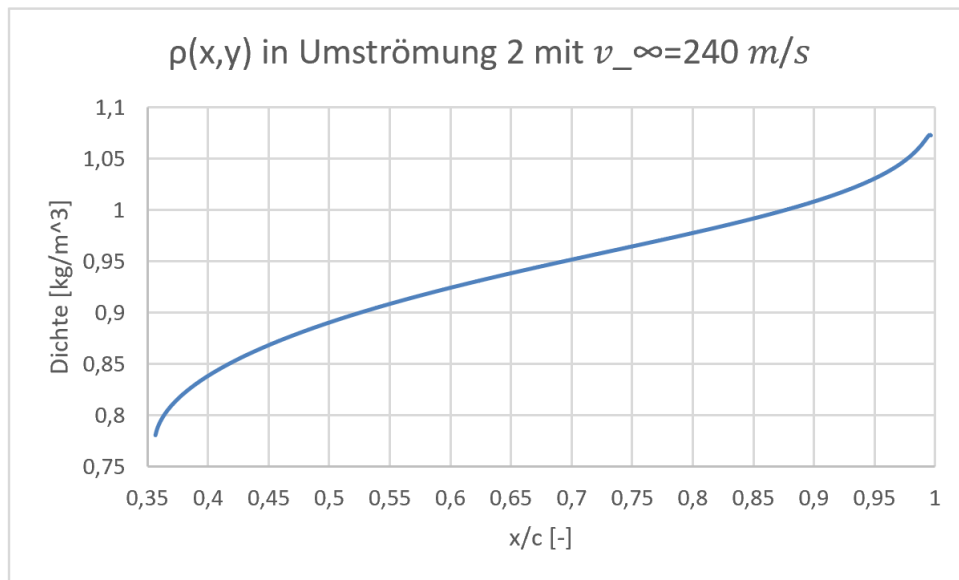


Abbildung 34: Umströmung 2, Panelverfahren 2: Dichte auf der Oberfläche des Profils in der Region um die Hinterkante

5.3 Vergleich

In diesem Kapitel werden die mit den Panelverfahren berechneten Werte anhand der mit Ansys-Fluent simulierten Werte auf ihre Vergleichbarkeit hin überprüft. Es werden die Diskrepanzen zwischen den verschiedenen Modellen aufgezeigt und auf den Zusammenhang mit dem Einfluss der steigenden Kompressibilität untersucht. Alle Graphen, die in diesem Kapitel für die Vergleiche genutzt werden, sind Verteilungen berechneter physikalischer Größen auf der oberen Profilkontur in Abhängigkeit der auf die Sehnenlänge normierten X-Koordinate.

5.3.1 Abweichung der Ergebnisse der verschiedenen Berechnungsmodelle

Die für Umströmung 1 durchgeführten Berechnungen und Simulationen liefern Ergebnisse für die Geschwindigkeit auf der Profilkontur und werden in folgender Abbildung dargestellt:

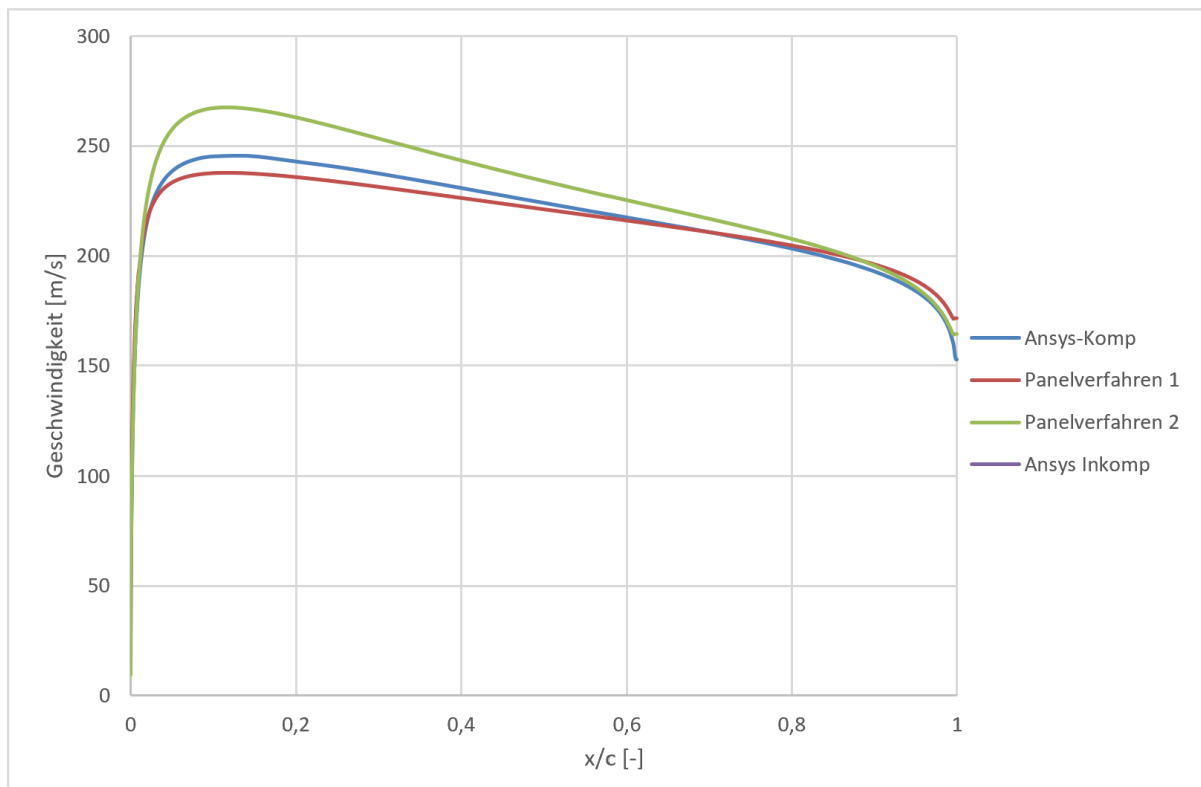


Abbildung 35: Umströmung 1, Geschwindigkeit auf der Profilkontur aller vier Berechnungsmodelle

Anfangs wird das auf dem Geschwindigkeitspotential basierende Panelverfahren 1 mit der inkompressiblen Ansys-Simulation verglichen, um die Aussagekraft des Panelverfahren zu untermauern. Dieses herkömmliche Panelverfahren ist seit Jahren eine validierte, sichere und variable Methode, um diverse inkompressible Umströmungen zu berechnen, deshalb wird bei diesem ersten Vergleich ein nahezu übereinstimmendes Ergebnis erwartet und durch die Kongruenz der beiden zugehörigen Kurven bestätigt.

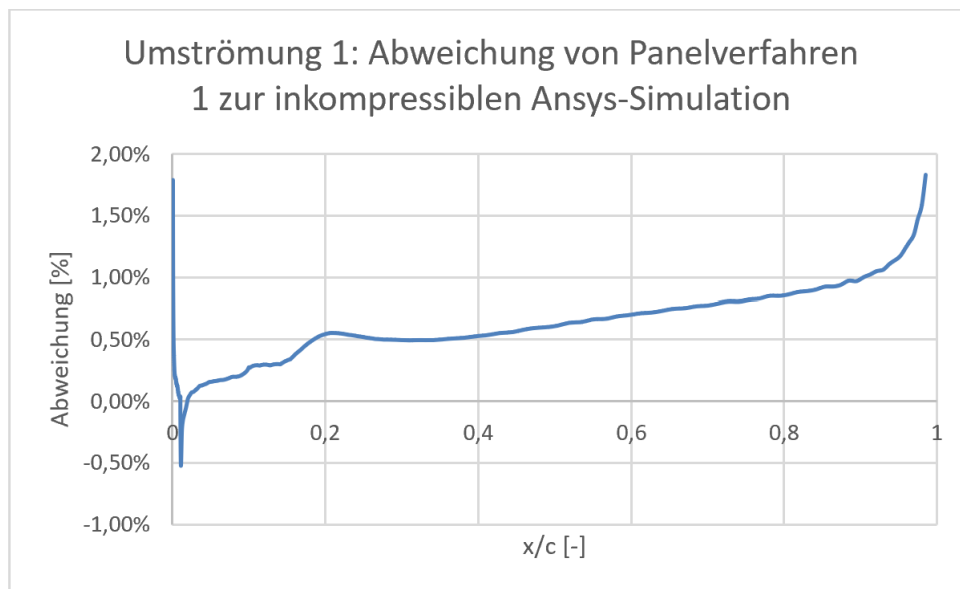


Abbildung 36: Umströmung 1: Abweichung von Panelverfahren 1 zur inkompressiblen Ansys-Simulation

In Abbildung 36 ist die Abweichung beider Kurven voneinander zu sehen. Wie erwartet ist die Diskrepanz zwischen den beiden Modellen sehr klein. Es ist anzumerken, dass die Abweichung, nahe der Vorder- und der Hinterkante, aufgrund der Panel-Diskretisierung auch bei sehr kleinen Panels fehlerbehaftet bleibt. Eine korrekte Abbildung dieser kleinen Regionen wäre mit einer unendlichen Anzahl an Panels erreichbar. Diese korrekte Abbildung würde jedoch keinen Gewinn in der in dieser Arbeit angestrebten Untersuchung mit sich bringen, sondern nur der Idee des Zeitgewinns durch die Anwendung des Panelverfahrens entgegenwirken.

Im Gegensatz zu diesem ersten Vergleich sollte die Diskrepanz zwischen Panelverfahren 1 und kompressibler Ansys-Simulation deutlich größer sein, da die Kompressibilitätsfaktoren in der Potentialtheorie nicht berücksichtigt werden.

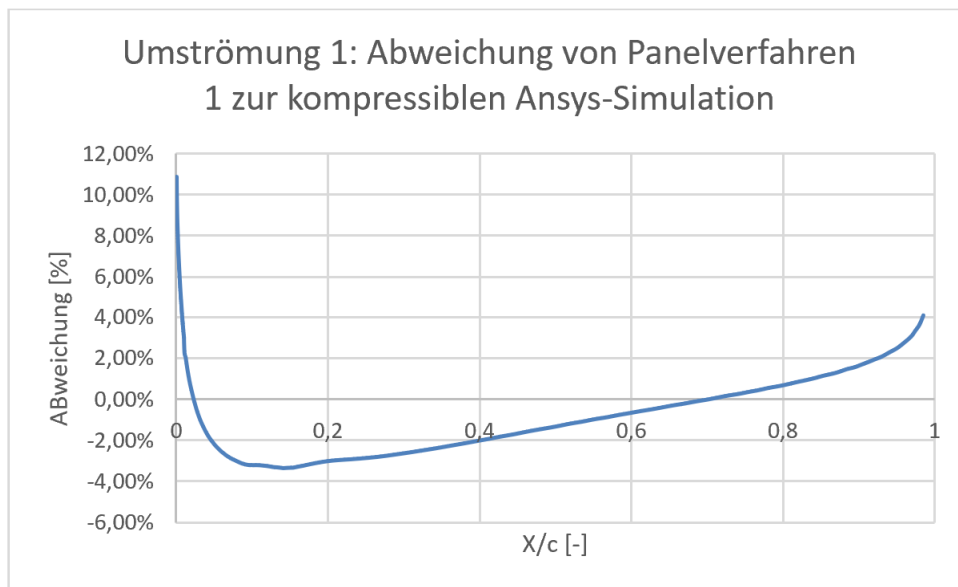


Abbildung 37: Umströmung 1: Abweichung von Panelverfahren 1 zur kompressiblen Ansys-Simulation

Die Kurve in Abbildung 37 repräsentiert die Abweichung der mit den beiden Modellen berechneten Werte für die Geschwindigkeit. Wie grob in Abbildung 35 und detailliert in Abbildung 37 zu erkennen ist diese örtlich deutlich größer als die, Abweichung des Panelverfahrens 1 zu der inkompressiblen Simulation. Es zeichnen sich drei Regionen ab:

- Region 1: $\frac{x}{c} = 0 - \frac{x}{c} = 0,01$
- Region 2: $\frac{x}{c} = 0,01 - \frac{x}{c} = 0,088$
- Region 3: $\frac{x}{c} = 0,88 - \frac{x}{c} = 1$

In den Regionen 1 und 3, also den Bereichen um die Vorder- und Hinterkante, ist die Abweichung sehr groß und somit der Einfluss der Kompressibilitätsfaktoren nicht mehr vernachlässigbar. In Region 2, in der die Abweichung nicht sehr groß ist, liefert Panelverfahren 1 bessere Ergebnisse als Panelverfahren 2.

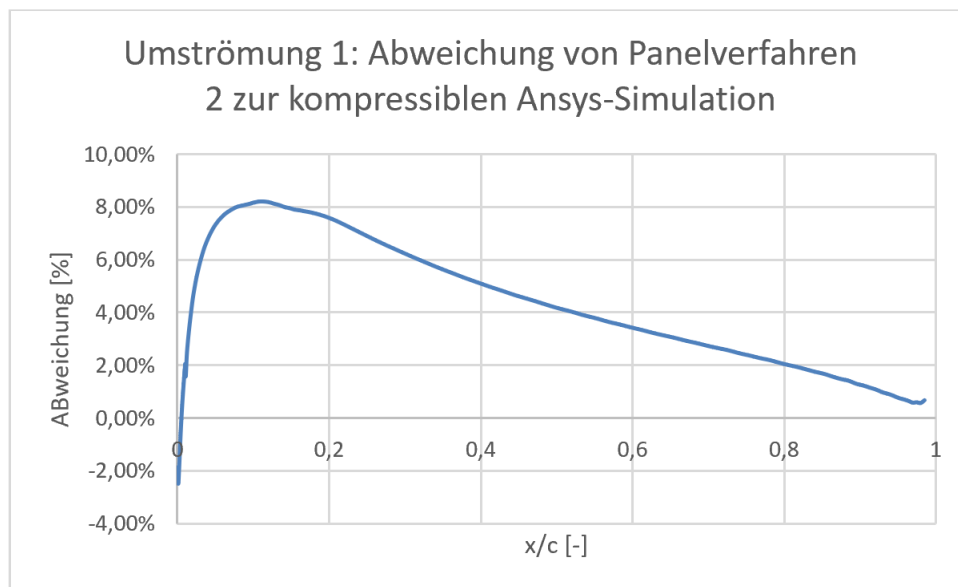


Abbildung 38: Umströmung 1: Abweichung von Panelverfahren 2 zur kompressiblen Ansys-Simulation

In Abbildung 38 wird die Abweichung zwischen den mit Panelverfahren 2 und der kompressiblen Ansys-Simulation für Umströmung 1 berechneten Geschwindigkeiten auf der Profilkontur aufgezeigt. Diesem Graph ist zu entnehmen, dass sich der Verlauf der Abweichung hier umgekehrt zu dem Verlauf aus Abbildung 37 verhält. Der Verlauf weist in den Regionen 1 und 3 sehr kleine Abweichungen auf, jedoch ist die Abweichung in Region 2 sehr groß.

Um diese Regionen genauer zu untersuchen werden die jeweiligen Ausschnitte aus Abbildung 35 vergrößert dargestellt.

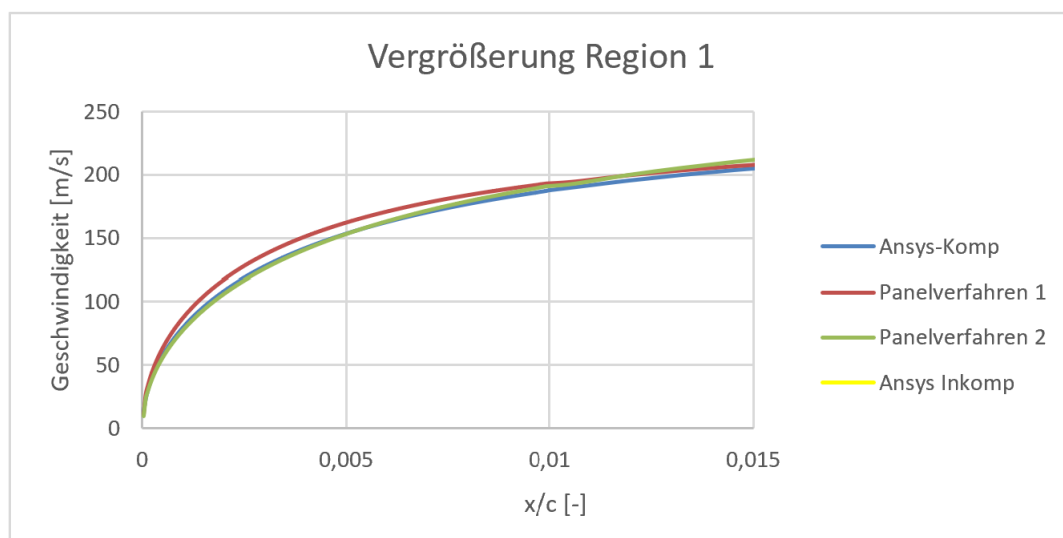


Abbildung 39: Ausschnitt aus Abbildung 35, der die Region $0 > x/c > 0,015$ vergrößert zeigt

Abbildung 39 ist herauszulesen, dass die mit dem Panelverfahren 2 erzielten Resultate viel näher an der kompressiblen Simulation liegen als die des Panelverfahrens 1. Die Abweichungen der Kurven der Panelverfahren zu der Simulation werden für diese Region in folgender Grafik dargestellt:

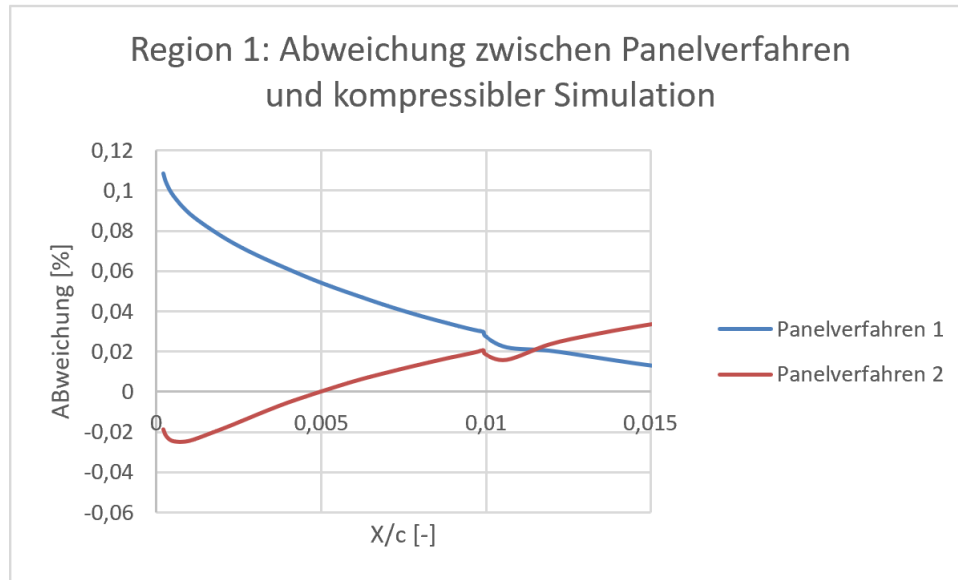


Abbildung 40: Umströmung 1: Region1: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation

Es zeigt sich, dass die mit Panelverfahren 2 berechneten Werte für die Geschwindigkeit in dieser Region bis zu circa fünf Mal genauere Werte als Panelverfahren 1 liefert. Im Durchschnitt weicht Panelverfahren 2 nämlich nur 1,25 % und Panelverfahren 1 um 5,72 % von der kompressiblen Simulation ab. Dieser Gewinn an Genauigkeit wird der Berücksichtigung der Kompressibilität durch das Impulspotential zugeschrieben. Der Fehler, der hier durch die Verletzung der Impulsbilanz wesentlich gemacht wird, führt trotzdem zu einem, bezogen auf die CFD Simulation, besseren Ergebnis als die Annahme der Inkompressibilität.

Nun wird Region 2 betrachtet, in der Panelverfahren 2 größere Abweichung zu der kompressiblen Simulation aufweist.

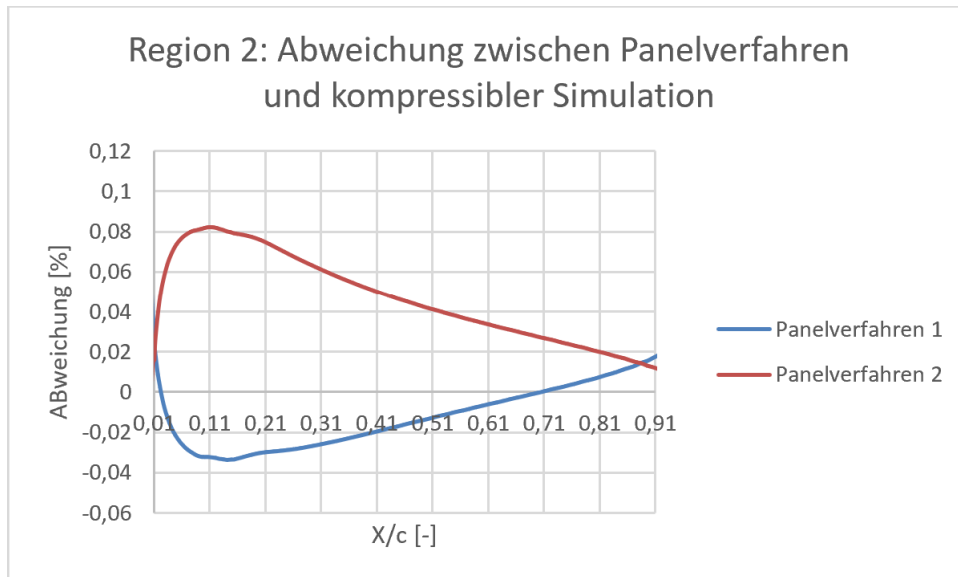


Abbildung 41: Umströmung 1: Region2: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation

Abbildung 41 zeigt den Verlauf der Abweichungen in Region 2. In dieser Region ist anzumerken, dass die potentialtheoretische Berechnung mit Panelverfahren 1 kleinere Abweichungen zur kompressiblen Simulation aufweist als Panelverfahren 2. Durchschnittlich weist Panelverfahren 1 eine Abweichung von 1,68% und Panelverfahren 2 4,91% auf. Damit unterschätzt Panelverfahren 1 durch die fehlende Berücksichtigung der Kompressibilität die Geschwindigkeit mit einer maximalen Abweichung von 3,37%. Im Gegensatz dazu überschätzt Panelverfahren 2 trotz Berücksichtigung der Kompressibilität die Geschwindigkeit mit einer maximalen Abweichung von 8,22 %.

Im dritten und letzten Bereich, Region 3, nähert sich die Kurve von Panelverfahren 2 wieder der der kompressiblen Simulation während sich die Kurve von Panelverfahren 1 von ihr entfernt. Über die letzten 12% der Sehnenlänge liefert Panelverfahren 2 Ergebnisse für die Geschwindigkeit, die durchschnittlich um 0,96 % und maximal um 1,45% von denen der kompressiblen Simulation abweichen. Panelverfahren 1 hingegen weicht durchschnittlich um 2,28 % und maximal um 4,07% ab.

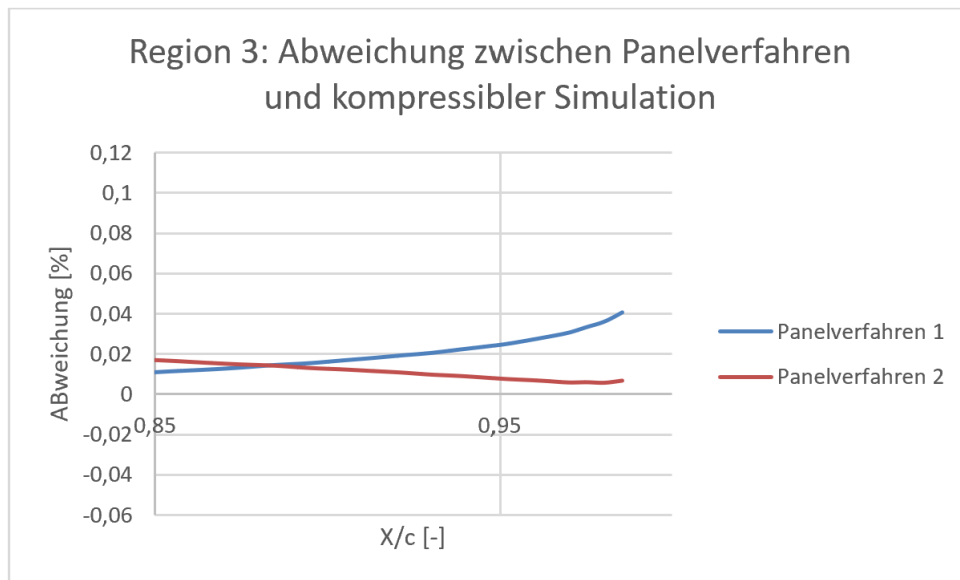


Abbildung 42: Umströmung 1: Region3: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation

Aus den Graphen aus Abbildung 40, Abbildung 41 und Abbildung 42 wird herausgelesen, dass die Regionen, in denen das eine Panelverfahren genauere Ergebnisse als das andere liefert, durch das Passieren der Anströmgeschwindigkeit auszeichnen. Für Umströmung 1 beträgt diese $v_{\infty} = 200 \frac{m}{s}$. Dieser Schnittpunkt fordert, dass die Panelverfahren, wie in Abbildung 43 und Abbildung 44 an diesem Punkt dasselbe Ergebnis liefern.

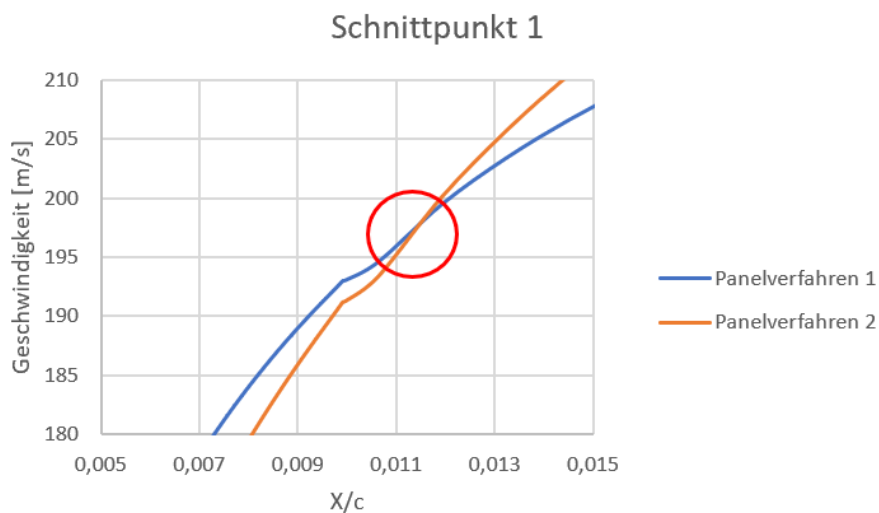


Abbildung 43: Umströmung 1: Schnittpunkte 1 der Kurven der Panelverfahren

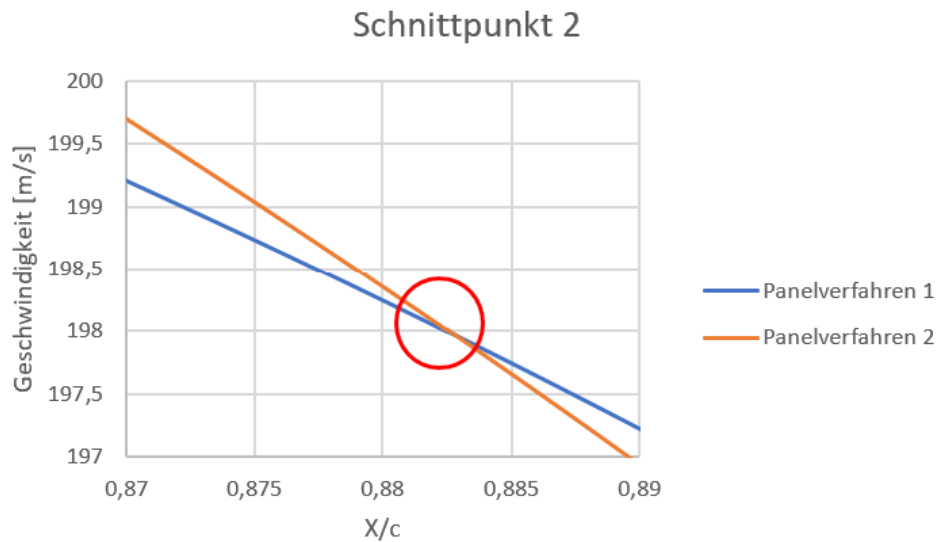


Abbildung 44: Schnittpunkte 2 der Kurven der Panelverfahren

Da das in Kapitel 3.2 beschriebene Vorgehen, um den volumenspezifischen Impuls in Dichte und Geschwindigkeit aufzuteilen, für dieses Ergebnis nur die Möglichkeit bietet, dass die Dichte an diesem Punkt gleich Eins ist, sprich der Anströmdichte $\rho_{\infty} = 1 \frac{kg}{m^3}$, sein muss, liegt lokal relativ zur Anströmung keine Kompression der Luft vor und beide Panelverfahren berechnen dasselbe Ergebnis. Des Weiteren ist zu beobachten, dass sich die Regionen 1 und 3, in denen Panelverfahren 2 genauere Werte als Panelverfahren 1 liefert, sich durch eine hohe Differenz zwischen lokaler Geschwindigkeit und der Anströmgeschwindigkeit auszeichnen i.e. eine hohe Kompression aufweisen. Diese Beobachtung erklärt, warum Panelverfahren 1, trotz fehlender Berücksichtigung der Kompressibilität, in Region 2 genauere Ergebnisse liefert.

Um diese bessere Genauigkeit von Panelverfahren 2 in Bereichen hoher Kompression genauer zu untersuchen, wird für Umströmung 2, also der Umströmung mit der Anströmgeschwindigkeit $v_{\infty} = 240 \frac{m}{s}$, die Abweichung beider Panelverfahren zur kompressiblen Simulation betrachtet.

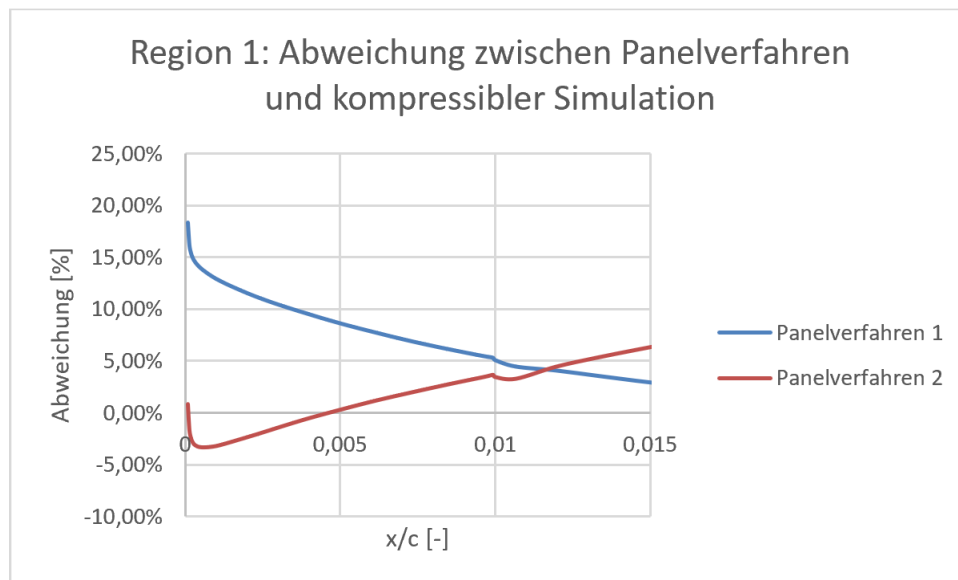


Abbildung 45: Umströmung 2: Region1: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation

In Region 1 herrscht durch die Erhöhung der Anströmgeschwindigkeit nun eine noch größere Differenz zwischen der lokalen Geschwindigkeit und der Anströmgeschwindigkeit. Panelverfahren 1 erzielt in diesem Gebiet durchschnittlich nun eine Abweichung von 9,04% und maximal sogar 18,38%. Dadurch ist die Abweichung im Schnitt circa doppelt so groß wie im Falle der ersten Umströmung. Die mit dem Panelverfahren 2 berechneten Werte besitzen eine Abweichung von durchschnittlich 1,9% und maximal 3,61%. Damit hat das Panelverfahren 2 trotz Erhöhung der Anströmgeschwindigkeit und somit der Erhöhung der Kompressibilitätseffekte seine Genauigkeit behalten.

Auch für Umströmung 2 berechnet das Panelverfahren 2 in Region 3 genauere Ergebnisse als Panelverfahren 1. Die mit Panelverfahren 1 berechneten Werte besitzen eine durchschnittliche Abweichung von 3,42 %. Das Panelverfahren wiederum nur 0,68%.

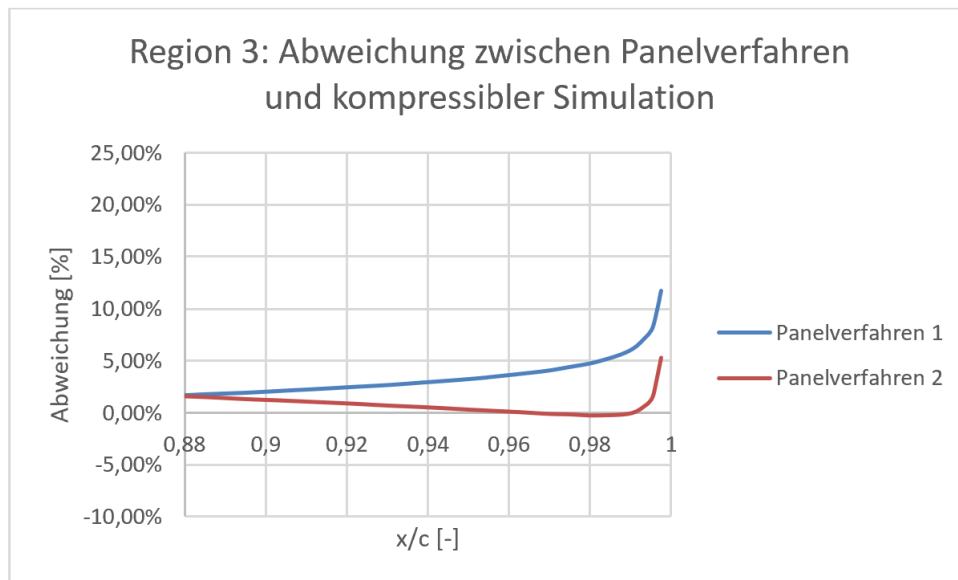


Abbildung 46: Umströmung 2: Region3: Abweichung zwischen Panelverfahren und kompressibler Simulation

5.3.2 Einfluss der Rotation des Fluids auf die Genauigkeit von Panelverfahren 2

Wie in Kapitel 3 erläutert, kann die Anwendung des Impulspotentials trotz der Verletzung der Impulserhaltung ein effektives Werkzeug sein, um kompressible Strömungen mit den weitreichenden und effizienten Methoden der Potentialtheorie zu berechnen. In diesem Kapitel soll untersucht werden, welche Faktoren den größten Einfluss auf die Verwendbarkeit des Impulspotential haben.

Es wurde im Vergleich der Resultate im vorangegangenen Kapitel gezeigt, dass das Panelverfahren 2, das das Impulspotential nutzt, in den Regionen 1 und 3 sehr genau Ergebnisse liefert. Aus den Graphen der berechneten Geschwindigkeiten in diesen Regionen, konnte herausgelesen werden, dass in diesen Regionen die lokale Geschwindigkeit stark von der Anströmgeschwindigkeit abweicht und dadurch die Kompressibilitätseffekte hoch sind. Dies impliziert, dass der Gewinn an Genauigkeit, durch die Berücksichtigung der Kompressibilität in diesen Bereich, größer war als der Fehler, der durch die Verletzung der Impulsbilanz gemacht wurde. In folgender Abbildung ist ein Graph des Einflusses der Kompressibilität in Form der Differenz der lokalen Geschwindigkeit zu der Anströmgeschwindigkeit.

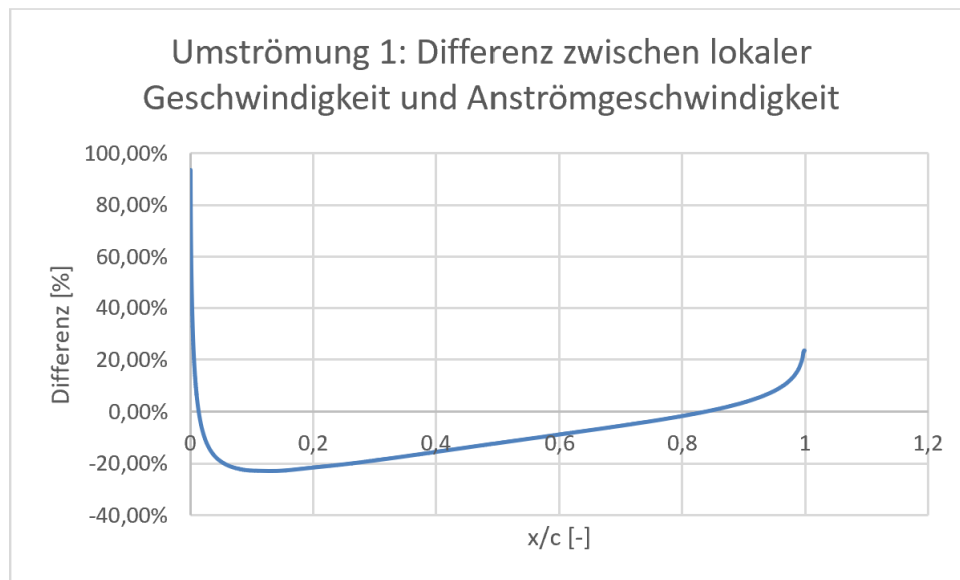


Abbildung 47: Umströmung 1: Differenz zwischen lokaler Geschwindigkeit und Anströmgeschwindigkeit

In Region 1 ist die Differenz und somit auch der Einfluss der Kompressibilität sehr hoch. Dadurch lassen sich die sehr genauen Ergebnisse in dieser Region erklären. Region 2 weist niedrige Kompressibilität und erklärt somit die besseren Ergebnisse der inkompressiblen Panelmethode. Region besitzt ähnliche Kompressibilität wie Region 2, jedoch sind die hier mit Panelverfahren 2 berechneten Werte trotzdem sehr genau. Diese Beobachtung lässt vermuten, dass die Kompressibilität nicht sehr hoch sein muss, um den Fehler, der durch die Verletzung der Impulserhaltung gemacht wird, zu überwiegen, so lange der Fehler in dieser Region nicht sehr hoch ist. In Kapitel 3.1 wurde bereits gezeigt, dass die Impulserhaltung für eine rotationsbehaftete Strömung, also eine Strömung mit $\nabla \times \vec{v} \neq 0$, nicht erfüllt ist und der Fehler proportional zu der Größe der Rotation ist.

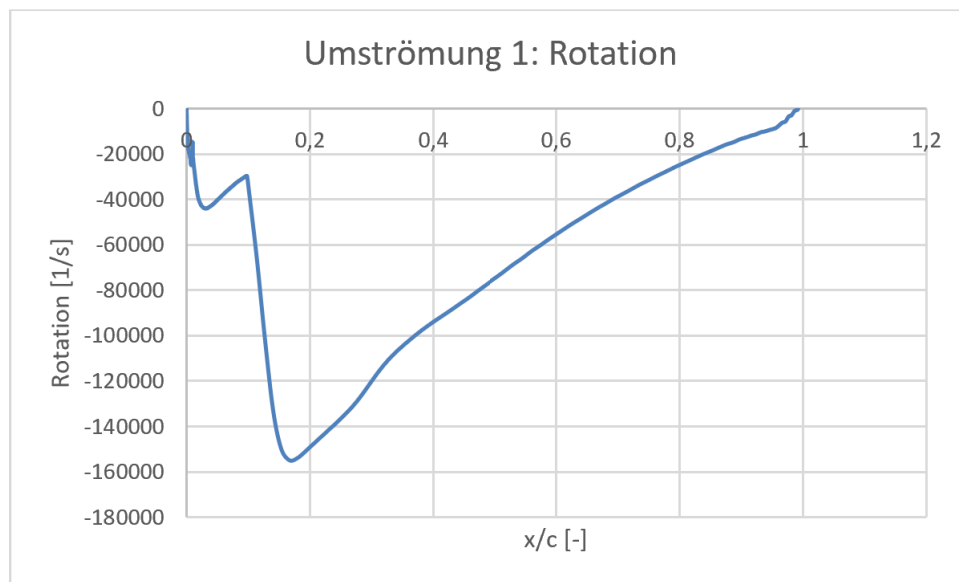


Abbildung 48: Umströmung 1: Rotationsverlauf

In Abbildung 1 ist der Verlauf der Rotation in Umströmung 1 aufgetragen. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass die Rotation in den Regionen 1 und 3, in denen die berechneten Werte sehr genau sind, relativ klein ist im Gegensatz zu der Rotation in Region 2. Dieser Graph bekräftigt die Vermutung der eben erwähnten Proportionalität des gemachten Fehlers zur Rotation, da Panelverfahren 2 in der Region der größten Rotation die ungenauesten Ergebnisse liefert.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die hochentwickelte Theorie der Potentialströmungen besitzt in all ihrer Vielfalt effiziente und validierte Werkzeuge zur Berechnung von subsonischen inkompressiblen Strömungen. Die in dieser Arbeit vorgenommene Modifikation in der Form der Berechnung eines Impulsfeldes anstelle eines Geschwindigkeitsfeldes, wie es in der klassischen Potentialtheorie der Fall ist, ist eine interessante und erfolgsversprechende Erweiterung dieser Theorie. Es hat sich gezeigt, dass die potentialtheoretische Methode mit der Nutzung des Impulspotentials auch physikalische Eigenschaften einer kompressiblen Strömung in manchen Regionen der Strömung erstaunlich genau berechnen kann. Die für diese Berechnungen benötigten Rechner- und Zeitkapazitäten belaufen sich auf ein Minimum, da die Berechnungen mit einem in VBA programmierten Panelverfahren berechnet wurden, welches in jeder relativ aktuellen Version von Microsoft Excel ohne außerordentliche Programmierkenntnisse zu

starten und innerhalb weniger Augenblicke berechnet ist. Da kompressible Strömungen üblicherweise durch aufwendige CFD-Simulationen berechnet werden, liefert dieses potentialtheoretische Panelverfahren eine nicht zu unterschätzende Alternative. Der Fehler, der bei der Anwendung des Impulspotentials durch die Verletzung der Impulserhaltung bei der Berechnung einer kompressiblen Strömung gemacht wird ist bereichsweise so klein, dass die berechneten Werte mindestens eine realistische Einschätzung des Verhaltens der Strömung widerspiegeln oder auch als Initialwerte genutzt werden können, um das Konvergieren einer CFD-Simulation zu beschleunigen. Ein Anstoß zur Weiterarbeit mit dem Impulspotential ist das weitere Untersuchen des Zusammenhangs zwischen der Rotation des strömenden Fluids und dem Fehler, der durch die Verletzung des Impulspotentials gemacht wird. Eine Proportionalität zwischen den beiden Faktoren wurde schon in dieser Arbeit beobachtet. Nach dem Prinzip, dass ein bekannter Fehler kein Fehler mehr ist, würde eine Korrekturfaktor in Abhängigkeit des numerischen Wertes für die Rotation es möglich machen, mit einfachsten Mitteln, wie eine Excel-Datei samt VBA-Modul es ist, eine aussagekräftige Berechnung einer subsonischen kompressiblen Profilumströmung in kürzester Zeit durchzuführen.

7 Literaturverzeichnis

Anderson, John David (2017): Fundamentals of aerodynamics. Sixth edition. New York, NY: McGraw-Hill Education (McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering).

Baehr, Hans Dieter; Kabelac, Stephan (2016): Thermodynamik. Grundlagen und technische Anwendungen. 16., aktualisierte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg. Online verfügbar unter <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-49568-1>.

G. Dimitriadis: Aerodynamics. Panel Methods. Hg. v. Université de Liège.

Thermodynamik (2009). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.